4B81-83

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2006

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

première épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

N.B. : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte, notamment, la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

On tâche de couvrir la plus grande surface possible d'un jardin carré par des dalles circulaires de même rayon ne se chevauchant pas. Il s'agit donc principalement de *géométrie*. Un dessin est fort utile, voire indispensable, pour découvrir, puis décrire l'idée d'une démonstration, ou illustrer un point de raisonnement ; il ne saurait toutefois constituer une démonstration à lui seul, et doit toujours être accompagné de notations précises et de justifications fournissant un raisonnement complet. Le barème tiendra largement compte des dessins et de leur justification.

Notations

On note E le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Dans certaines questions, on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ par l'application $(x,y) \mapsto x+iy$; on pourra, dès qu'il paraît utile, faire usage de cette identification. Deux parties X et Y de E sont dites *isométriques* s'il existe une isométrie φ de E telle que $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

Si A, B, C sont des points de E, on note :

AB le segment d'extrémités A et B, enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$,

$d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ la distance entre les points A et B,

ABC l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$, appelée triangle ABC lorsque les points A, B et C ne sont pas alignés.

Soient a un nombre réel $\geqslant 0$ et M un point de E. On note $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ le disque ouvert, $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M},a)$ le disque fermé et $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$ le cercle de centre M et de rayon a. Lorsque $a=1$, on écrit $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ au lieu de $\mathrm{D}(\mathrm{M},1)$.

On pose $\mathrm{Q}(a) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$ et $\mathrm{Q}^0(a) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < a, |y| < a\}$; un *carré de côté* $2a$ est une partie de E isométrique à $\mathrm{Q}(a)$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties bornées de E qui ont une aire, et on note $s(\mathrm{X})$ l'aire d'un élément X de $\mathcal{A}$: c'est un nombre réel positif.

Par exemple, l'aire du carré $\mathrm{Q}(1)$ vaut 4 et celle d'un disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ vaut π.

On **admet** que toutes les parties de E que le problème amène à considérer sont dans $\mathcal{A}$, pourvu qu'elles soient bornées ; aucune difficulté ne sera soulevée sur ce point. On admet aussi les propriétés suivantes :

a) Soient X et Y des éléments de $\mathcal{A}$; si Y contient X, on a $s(\mathrm{X}) \leqslant s(\mathrm{Y})$, et l'ensemble $\mathrm{Y}-\mathrm{X}$, complémentaire de X dans Y, appartient aussi à $\mathcal{A}$.

b) Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille *finie* d'éléments de $\mathcal{A}$; alors l'intersection des X_i (si l'ensemble I n'est pas vide), ainsi que leur réunion appartiennent encore à $\mathcal{A}$. De plus, on a

$$s\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i\Big) \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} s(\mathrm{X}_i),$$

avec égalité si les ensembles X_i sont disjoints deux à deux.

c) Soit X un élément de $\mathcal{A}$, et soit φ une application affine de E dans lui-même ; alors, l'ensemble $\varphi(\mathrm{X})$ appartient à $\mathcal{A}$, et l'on a

$$s(\varphi(\mathrm{X})) = |\lambda| \; s(\mathrm{X}),$$

où λ est le déterminant de l'application linéaire associée à φ.

d) Toute partie de E qui est incluse dans un segment de droite ou un cercle, appartient à $\mathcal{A}$ et son aire vaut 0.

Sauf (par exception) dans la question $(\text{VI}, 7)$, les raisonnements menant à des calculs d'aires devront s'appuyer sur les propriétés a) à d) et sur les exemples donnés ci-dessus. S'il s'avère nécessaire d'utiliser une autre propriété connue des aires, il conviendra d'expliciter celle-ci.

Soit X un élément de $\mathcal{A}$; on appelle *dallage* de X une famille finie $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i \in \mathrm{I}}$ de disques ouverts (de rayon 1) inclus dans X et *disjoints deux à deux*. Le cardinal $\mathrm{Card}(\mathrm{I})$ est appelé cardinal (ou nombre d'éléments) du dallage.

Les six parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

I. Préliminaires

1) Quelle est l'aire d'un carré de côté $2a$?

2) Pour un point M quelconque de E, quelles sont les aires des disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}, a)$ et $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M}, a)$?

3) Soit X un élément de $\mathcal{A}$ et soit $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i \in \mathrm{I}}$ un dallage de X. Donner, en termes de $s(\mathrm{X})$, une majoration du cardinal de I.

Pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, on note $\mathrm{N}(a)$ le cardinal maximal des dallages du carré $\mathrm{Q}(a)$. On définit ainsi une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, qui est évidemment croissante.

4) Déterminer la valeur de $\mathrm{N}(a)$ pour $0 \leqslant a \leqslant 1$.

5) Démontrer qu'un disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$, contenu dans $\mathrm{Q}(a)$, est en fait contenu dans $\mathrm{Q}^0(a)$.

6) Soient n un entier $\geqslant 1$ et a un nombre réel $\geqslant 0$. Démontrer que l'on a $\mathrm{N}(na) \geqslant n^2\, \mathrm{N}(a)$.

7) Soit a un nombre réel $\geqslant 1$ et soit $(\mathrm{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de points de E. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i \in \mathrm{I}}$ est un dallage du carré $\mathrm{Q}(a)$;

(ii) le carré $\mathrm{Q}(a-1)$ contient chacun des points M_i et, pour i et j distincts dans I, on a $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j) \geqslant 2$.

8) Démontrer qu'il existe un nombre réel $a_2 \geqslant 0$ tel que $\mathrm{N}(a_2) = 2$ et $\mathrm{N}(a) < 2$ pour $0 \leqslant a < a_2$, et déterminer a_2.

9) Soit a un nombre réel $\geqslant 0$, et soit n un entier tel que l'on ait $\mathrm{N}(b) \geqslant n$ pour tout nombre réel $b > a$. Démontrer que l'on a $\mathrm{N}(a) \geqslant n$. [On pourra choisir, pour tout entier $k \geqslant 1$, un dallage $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i(k)))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ du carré $\mathrm{Q}(a + \frac{1}{k})$, et faire un raisonnement de compacité en utilisant la question 7)]

II. Existence de δ

Pour tout nombre réel $a > 0$, on pose $d(a) = \mathrm{N}(a)/a^2$.

1) Trouver une majoration de $d(a)$ pour $a > 0$.

2) Soient a un nombre réel > 0, n un entier $\geqslant 0$ et α un nombre réel tel que $0 \leqslant \alpha < 1$. Donner une minoration de $d((n+\alpha)a)$ en termes de $d(a)$ et de n (minoration indépendante de α).

Tournez la page S.V.P.

3) On note δ la borne supérieure des $d(a)$ pour $a > 0$. Démontrer que $d(a)$ tend vers δ lorsque a tend vers $+\infty$.

III. Minoration de δ

Dans cette partie, on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$; on note $|z|$ le module du nombre complexe z. On pose $j = e^{2\pi i/3}$ et on note Λ le sous-groupe (additif) de $\mathbf{C}$ engendré par 2 et $2j$.

1) Démontrer que le module de tout élément non nul de Λ est au moins égal à 2.

2) En estimant le nombre des points de Λ situés dans un carré $\mathrm{Q}(a)$, démontrer que l'on a $\delta \geqslant 2/\sqrt{3}$.

IV. Un résultat auxiliaire

Dans cette partie, on identifie encore $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$, et on note $\overline{\mathrm{D}}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est $\leqslant 1$. Pour z_1, z_2, z_3 dans $\mathbf{C}$, on note $\mu(z_1, z_2, z_3)$ la plus petite des distances $|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|$ ou $|z_3 - z_1|$.

1) Démontrer que l'ensemble $\mu(\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}})$ est une partie compacte, non vide, de $\mathbf{R}$. On note m le plus grand élément de cette partie.

2) Soient α, β, γ des nombres réels. Démontrer l'inégalité $\mu(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}) \leqslant \sqrt{3}$ [on pourra se ramener à $\alpha = 0$].

3) Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes dont les modules sont $\leqslant 1$, mais pas tous égaux à 1.

a) Construire, par une manipulation géométrique simple à partir de z_1, z_2, z_3, des nombres complexes t_1, t_2, t_3 dont le module est $\leqslant 1$ et qui satisfont à $\mu(t_1, t_2, t_3) > \mu(z_1, z_2, z_3)$ [on pourra distinguer suivant le nombre des indices i pour lesquels $|z_i| = 1$].

b) En déduire que l'on a $m = \sqrt{3}$ et $\mu(z_1, z_2, z_3) < \sqrt{3}$.

V. Majoration de δ

Dans cette partie et la suivante, on va démontrer que δ vaut $2/\sqrt{3}$. On fixe un nombre réel $a \geqslant 1$ et on fixe aussi un dallage $(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i))_{i \in \mathrm{I}}$ du carré $\mathrm{Q}(a)$. Pour $i \in \mathrm{I}$, on écrit D_i au lieu de $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, on note Δ_i le disque ouvert $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i, 2/\sqrt{3})$ et Γ_i le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M}_i, 2/\sqrt{3})$. On note $\overline{\mathrm{Q}}$ le carré $\mathrm{Q}(a + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$; le carré $\overline{\mathrm{Q}}$ contient tous les disques Δ_i, $i \in \mathrm{I}$.

Pour certaines questions, il pourra être commode de calculer en termes de coordonnées dans un repère orthonormé de E adapté à la situation.

1) Soient i et j deux indices distincts dans I. Démontrer que l'ensemble des points M de E qui satisfont à l'inégalité $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) < d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M})$ est un demi-plan ouvert, et préciser quelle est la droite bordant ce demi-plan.

Pour $i \in \mathrm{I}$, on note V_i l'ensemble des points M du disque Δ_i qui satisfont aux inégalités

$$d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) < d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M}) \quad \text{pour tout indice } j \in \mathrm{I} \text{ distinct de } i.$$

2) Démontrer que V_i est une partie ouverte de Δ_i contenant D_i.

Dans la partie VI qui termine ce problème, on démontrera, pour tout $i \in \mathrm{I}$, l'inégalité

$$s(\mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{V}_i).$$

3) Admettant cela, prouver que l'on a $s\left(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{D}_i\right) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\overline{\mathrm{Q}})$.

4) En déduire que δ vaut $2/\sqrt{3}$.

VI. Démonstration d'une inégalité

On garde les notations de la partie précédente, mais on fixe l'indice $i \in \mathrm{I}$. On note $\mathrm{I}(i)$ l'ensemble des indices $j \in \mathrm{I}$, distincts de i, tels que $\Delta_i \cap \Delta_j$ ne soit pas vide.

1) Soit $j \in \mathrm{I}(i)$. Démontrer que les cercles Γ_i et Γ_j se coupent en deux points qui ne sont pas alignés avec M_i.

Pour $j \in \mathrm{I}(i)$, on note A_j et B_j ces deux points d'intersection. On note T_j l'*intérieur* du triangle $\mathrm{M}_i\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients *strictement* positifs de M_i, A_j, B_j.

Pour un point M de Δ_i, distinct de M_i, on note $p(\mathrm{M})$ l'unique point de Γ_i situé sur la demi-droite d'origine M_i qui contient le point M.

2) Démontrer que, pour tout $j \in \mathrm{I}(i)$, on a $p(\mathrm{T}_j) = \Delta_j \cap \Gamma_i$.

3) Soient j et k deux indices distincts dans $\mathrm{I}(i)$. Démontrer que les ensembles $p(\mathrm{T}_j)$ et $p(\mathrm{T}_k)$ sont disjoints [utiliser la partie IV]. En déduire que les ensembles T_j et T_k sont disjoints.

4) Soit $j \in \mathrm{I}(i)$ et soit M un point de Δ_i distinct de M_i. Prouver que, si l'on a $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}) \geqslant d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M})$, alors le point $p(\mathrm{M})$ appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$.

5) Pour $j \in \mathrm{I}(i)$, démontrer que l'ensemble T_j est formé des points de l'ensemble V_i (défini dans la partie V), distincts de M_i, et dont l'image par p appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$.

6) On note W_i l'ensemble des points de V_i qui n'appartiennent à aucun des T_j, $j \in \mathrm{I}(i)$. Démontrer l'égalité $s(\mathrm{W}_i \cap \mathrm{D}_i) = 3\, s(\mathrm{W}_i)/4$.

7) Dans cette question, on pourra utiliser les formules usuelles donnant l'aire d'un triangle ; on pourra aussi utiliser qu'un secteur circulaire de sommet M du disque $\mathrm{D}(\mathrm{M})$, dont l'angle a pour mesure α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$), a une aire égale à $\alpha/2$.

Démontrer que, pour $j \in \mathrm{I}(i)$, on a

$$s(\mathrm{T}_j \cap \mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{T}_j)$$

[on pourra noter 2ℓ la distance $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j)$ et 2β la mesure de l'angle en M_i du triangle $\mathrm{M}_i\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$].

8) Démontrer enfin l'inégalité $s(\mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\, s(\mathrm{V}_i)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 6 000137 – D'après documents fournis.