5 000033

4B72-72
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2005

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Calculatrice de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

N.B. : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte, notamment, la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, par $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ formé des suites bornées et par $\mathbf{E}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ est un élément de $\mathbf{E}$ on pose $\|x\|=\sup\{|x_k|,\ k\geqslant 0\}$; on admet que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbf{E}$ et que $\mathbf{E}$ est complet pour cette norme.

On note $\mathscr{T}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ associe $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $y_k = \dfrac{\sum_{j=0}^{k} x_j}{k+1}$. Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathbf{E}$ est stable par $\mathscr{T}$. On note T la restriction de $\mathscr{T}$ à $\mathbf{E}$.
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que $\mathbf{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers l, il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T. Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie II on détermine le noyau, l'image et le spectre de T.

La partie III est consacrée à l'aspect régularisant de T. On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de $\mathbf{E}$ telles que, pour tout n, $T^n x$ soit une suite divergente, est dense dans $\mathbf{E}$.
3. Si Ω est l'ensemble des suites à termes dans $[0, 1]$, on définit la probabilité de KOLMOGOROFF P sur Ω et on démontre que :
   (a) $P(x \in \Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
   (b) $P(x \in \Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
2. Soit n un entier $\geqslant 1$; dans cette question on note x la suite définie par $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   On pose $y = Tx$.
   (a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geqslant 0$ et $0 \leqslant j < n$;
   (b) En déduire que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?

4. Soit t dans $[0, 1]$. On définit $x(t)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) = t \\ x_{k+1}(t) = (x_k(t) - 1)^2 \text{ pour } k \geqslant 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, pour tout t dans $[0, 1]$, la suite $x(t)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
On pose alors $y(t) = Tx(t)$.
Soit t_0 le nombre $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. (Il vaut $0,38$ à 10^{-2} près).

   (a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ est divergente.
      i. On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.
      ii. Vérifier que, si $t \neq t_0$, alors, pour tout entier k, $x_k(t) \neq \ell$.
      Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\dfrac{x_{k+1}(t) - \ell}{x_k(t) - \ell}$?
      iii. Conclure.

   (b) On définit f et g fonctions de $[0, 1]$ dans lui-même par :
   $f(x) = (x-1)^2$ et $g = f \circ f$.
      i. Dessiner le graphe de la fonction g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.
      ii. *Pour cette question , on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.*
      Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k \geqslant 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k \geqslant 0}$ sont convergentes.
      En déduire que $y(t)$ est convergente et identifier sa limite en fonction de t.
      iii. On rappelle que $y(t) = (y_k(t))_{k \geqslant 0}$. La suite de fonctions (y_k) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

B. Une remarque

Soit x dans $\mathbf{E}$ et $y = Tx$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leqslant \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.
2. En déduire que si x est une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0, 1\}$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + \cdots + p!$ et $v_p = 1! + 3! + 5! + \cdots + (2p-1)!$
De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

1. Montrer que $u_p \underset{p \to \infty}{\sim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{p \to \infty}{\sim} (2p-1)!$
   On définit une suite x de la manière suivante :
   si $k \in \mathbf{N}$, il existe un unique $j(k) \geqslant 0$ tel que $u_{j(k)} \leqslant k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ est pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ est impair on pose $x_k = 0$.
   Autrement dit
   $$x = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, (24 \text{ fois}), 1, 1, 1, (120 \text{ fois}) \ldots$$
2. On pose $y = Tx$. Calculer y_k lorsque $k = u_p$.

3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est égal à $[0, 1]$.
   Quel est celui de la suite x ?
4. Soient $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ un espace probabilisé, $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre 1/2. $(\forall k \geqslant 0,\ P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = 1/2)$.
   (a) Calculer, pour $k \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$, $P(X_k = X_{k+1} = X_{k+2} = ... = X_{k+p} = 0)$, puis $P(\forall j \geqslant k, X_j = 0)$.
   (b) En déduire que la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ diverge presque sûrement.
   (c) On appelle Y la suite TX où X est la suite (X_k).
   Montrer, en utilisant un théorème de cours, que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1. Montrer que l'application linéaire $\mathscr{T}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur lui-même.
2. On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{k+1},\ k \in \mathbf{N}\right\}$. Soit λ un nombre complexe. On note $I_{\mathscr{E}}$ l'application identique de $\mathscr{E}$ dans lui-même.
   (a) Montrer que si λ n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ est bijective.
   (b) Montrer que si λ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ n'est ni injective ni surjective.
3. Soit $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ dans $\mathbf{E}$. Montrer que :

$$y \in \mathrm{Im}(T) \iff \exists K > 0 \text{ tel que}, \forall k \geqslant 1,\ |(k+1)y_k - ky_{k-1}| \leqslant K.$$

4. L'application linéaire T de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

B. Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.**, on considère un nombre complexe λ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(L) \qquad \lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \mathscr{A}, \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{\lambda} \neq 1.$$

On écrit $1 - \dfrac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réels $(a \neq 0)$. On définit la suite α par :

$$(*) \qquad \alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geqslant 1,\ \alpha_k = \frac{1}{(1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k})}\alpha_{k-1}.$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

1. Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k.
2. Montrer que $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| \underset{k\to\infty}{=} -\dfrac{a}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
3. Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?

4. On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Pour a positif, montrer qu'il existe une nombre réel A_1 strictement positif tel que : $|\alpha_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{A_1}{k^a}$.

   (A_1 et les nombres réels $A_2, \dots, A_5$ qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).

5. On définit $U_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j\,|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right|$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante A_2 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant U_k \leqslant A_2\, k^a.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geqslant 1$ $|\alpha_k\, U_k| \leqslant A_3$.

6. En exprimant $\dfrac{1}{\alpha_j} - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à (*) montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad |\alpha_k| V_k \leqslant A_4.$$

C. Détermination du spectre de T.

Définition.

Soit S un endomorphisme continu de $\mathbf{E}$, on dit que S est inversible si S réalise une bijection de $\mathbf{E}$ sur lui-même.

Remarque : $\mathbf{E}$ étant complet, il résulte d'un théorème de BANACH que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de E.

On appelle spectre de S, et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_{\mathbf{E}}$ n'est pas inversible.

On **admettra** que $\sigma(S)$ est un fermé de $\mathbf{C}$.

1. Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.

   Dorénavant, on se donne un complexe λ **vérifiant les hypothèses** (L) **du II.B.** On garde les notations $\alpha, U, V, \dots$ du **II.B.**

2. Soient x et y deux éléments de $\mathscr{E}$. Vérifier que :

   $$(**) \qquad (T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 & = \dfrac{1}{1-\lambda} y_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ x_k & = \dfrac{1}{1 + (1-\frac{1}{\lambda})\frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \dfrac{1}{\lambda}(y_{k-1} - y_k - \dfrac{1}{k} y_k)\right) \end{cases}$$

3. On considère $y = \left(\dfrac{1}{k+1}\right)_{k\geqslant 0}$.

   On considère la suite x (*a priori* élément de $\mathscr{E}$) telle que $(T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y$.

   (a) Quel est le lien entre x et la suite α du **II.B.** ?

   (b) En utilisant **II.B.** montrer que, si $\mathrm{Re}(1 - \dfrac{1}{\lambda}) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

4. On suppose $\mathrm{Re}(1 - \dfrac{1}{\lambda}) > 0$.

   Soit y dans $\mathbf{E}$ et soit x la suite définie par les formules $(**)$ ci-dessus.

(a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda}\frac{y_{k-1}-y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda}\frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}.$$

$$\forall k \geqslant 1, \quad x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1}-y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}}\right)\alpha_k.$$

(b) En remarquant que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1}-y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} y_j\left(\frac{1}{\alpha_j}-\frac{1}{\alpha_{j-1}}\right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}$, montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que

$$\forall k \geqslant 0, \ |x_k| \leqslant A_5\|y\|.$$

5. Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

Partie III. Propriétés régularisantes de T

Notations et terminologie

1. On sera amené à considérer des suites de suites (ou plus généralement des familles de suites).
Si I est un ensemble d'indices le symbole $\left((x_k^{(i)})_{k\geqslant 0}\right)_{i\in I}$ désigne la famille des suites $x^{(i)}$ indexées par I, $x_k^{(i)}$ est le terme d'indice k de la suite $x^{(i)}$.
Par exemple considérer $\left(\left(\dfrac{1}{(k+1)^n}\right)_{k\geqslant 0}\right)_{n\geqslant 0}$, c'est considérer les suites :
$x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1.......)$
$x^{(1)} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5.......)$
$x^{(2)} = (1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25........)$
$x^{(3)} = (1, 1/8, 1/27, 1/64, 1/125......)$ etc.
Dans l'énoncé, k désignera presque toujours l'indice des suites de complexes et n sera réservé à l'indexation des suites de suites.

2. Limites :
A priori, le mot suite, sans indication contraire, désigne un élement de $\mathscr{E}$; aussi, lorsque l'on dit que la suite $(x_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ converge on veut dire que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)}$ existe dans $\mathbf{C}$.
Si on veut exprimer l'idée qu'il existe dans $\mathbf{E}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^{(n)}-x\| = 0$, on dira que la suite $(x^{(n)})$ d'élements de $\mathbf{E}$ converge dans $\mathbf{E}$ vers x.
Les expressions utilisées seront suffisamment détaillées pour éviter toute ambiguïté.

A. Convergence simple

Définition. Soient $(x^{(n)})_{n\geqslant 0} = ((x_k^{(n)})_{k\geqslant 0})_{n\geqslant 0}$ une suite d'élements de $\mathbf{E}$ et u dans $\mathbf{E}$. On dit que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ si pour tout $k \geqslant 0$, $(x_k^{(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers u_k quand n tend vers l'infini.

1. Exceptionnellement, dans cette question et la suivante, les suites de nombres complexes sont indexées par n pour des raisons qui apparaitront ultérieurement.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers ℓ dans $\mathbf{C}$.
Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha^j a_{n-j}$.
Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

2. Soient v et w deux suites de nombres complexes telles que :
$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = \alpha v_n + w_n, \\ (w_n)_{n \geqslant 0} \text{ converge vers } \ell. \end{cases}$$
Montrer que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

3. Soit x une suite de nombres complexes. On pose $a = x_0$ et $b = x_1$. On considère la suite $(x^{(n)})_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ définie par $x^{(n)} = T^n x$, en convenant que $x^{(0)} = x$.

   (a) Calculer $x_0^{(n)}$. Quelle eśt la limite de la suite $x_0^{(n)}$?

   (b) Calculer $x_1^{(n)}$. Quelle eśt la limite de la suite $x_1^{(n)}$?

   (c) Montrer que :
   $$\forall k, n \geqslant 0, \; x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2} x_{k+1}^{(n)} + \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)}.$$

   (d) Montrer que $x^{(n)}$ converge simplement vers la suite conśtante égale à a.

4. Montrer que, si $(x^{(n)})_{n \geqslant 0}$ converge dans $\mathbf{E}$, alors sa limite eśt la suite conśtante égale à a.

5. On suppose que $a = 0$ et que la suite (x_k) a une limite $c \neq 0$ dans $\mathbf{C}$.
Montrer que $(x^{(n)})_{n \geqslant 0}$ diverge dans $\mathbf{E}$.

B. Lissage : un résultat négatif

Pour n entier fixé, on note $\mathbf{E}_n = \{x \in \mathbf{E} \text{ telles que } T^n x \text{ converge dans } \mathbf{C}\}$. $\mathbf{E}_n$ eśt un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On admet le théorème suivant :

Soit $\mathbf{F}$ un espace de Banach. Si pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{F}_n$ eśt un sous ensemble de $\mathbf{F}$ fermé et d'intérieur vide, alors la réunion de tous les $\mathbf{F}_n$ eśt aussi d'intérieur vide.

1. Soit $\mathbf{F}$ un espace vectoriel normé et G un sous espace vectoriel de $\mathbf{F}$ d'interieur non vide.
Ainsi G contient une boule ouverte de $\mathbf{F}$, de centre x_0 et de rayon ε śtrictement positif.
En utilisant la śtructure d'espace vectoriel, montrer successivement que :

   (a) G contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε,

   (b) $\mathbf{F} = G$.

2. On admet provisoirement, dans cette queśtion, que $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   (a) Montrer que $\mathbf{E}_c$ eśt un sous espace fermé de $\mathbf{E}$.

   (b) Montrer que l'ensemble des x de $\mathbf{E}$ tels que, pour tout $n \geqslant 0$, la suite $T^n x$ ne soit pas convergente dans $\mathbf{C}$ eśt dense dans $\mathbf{E}$.

3. On prouve dans cette queśtion ce qui eśt admis à la queśtion précédente.

   (a) Soient t_0 un nombre réel positif et f une fonćtion de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{C}$.
   Pour $n \geqslant 0$, on note (H_n) l'hypothèse :
   $$(H_n) \qquad \exists t_1 \geqslant t_0, \quad \forall j \leqslant n, \quad \exists M_j, \quad \forall t > t_1, \quad |f^{(j)}(t)| \leqslant \frac{M_j}{t^j} \quad \text{avec } f^{(0)} = f$$
   .
   Pour $t \geqslant t_0 + 1$, on pose $g(t) = (t+1)f(t) - tf(t-1)$. La fonćtion g eśt de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[t_0 + 1, \infty[$.
   On suppose (H_n) vérifiée pour la fonćtion f et un entier $n \geqslant 1$.
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que g vérifie (H_{n-1}).

(b) Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, \infty[$, satisfaisant l'hypothèse (H_n) avec $t_0 = 0$. Pour tout entier $k \geqslant O$, on pose $y_k = f(k)$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe x dans $\mathbf{E}$ telle que $y = T^n x$.

(c) On pose $y = (\exp(i \ln(k+1)))_{k \geqslant 0}$.

i. Montrer que y est dans $\mathrm{Im}(T^n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

ii. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{E}_n$ est différent de $\mathbf{E}$.

C. Aspect probabiliste

On appelle Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0, 1]$.

Étant donnés un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0 \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant 1$, on désigne par $K_{a,b}$ le *pavé* $K_{a,b} = \left\{x \in \mathbf{R}^{n+1},\ \forall j,\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j\right\}$.

Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $v(K_{a,b}) = \prod_{j=0}^{n} (b_j - a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par

$$\Omega_K = \{x = (x_k)_{k \geqslant 0}, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu $\mathscr{B}$ une probabilité P telle que $P(\Omega_K) = v(K)$ pour tout pavé K.

On définit enfin, pour k entier naturel, la variable aléatoire réelle X_k, application de Ω dans $\mathbf{R}$, qui à $x = (x_i)_{i \geqslant 0}$ associe $X_k(x) = x_k$.

1. Montrer que $(X_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et identifier cette loi.
2. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$.
   Calculer, pour $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$, $P\left(\{\omega \in \Omega |\ |X_j(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \text{ pour } j = n+1, n+2, \dots, n+p\}\right)$.
3. En déduire que x diverge presque sûrement (on pourra admettre que l'ensemble $\{x \in \Omega \mid x \text{ converge }\}$ est dans la tribu $\mathscr{B}$).
4. En utilisant un théorème du programme, montrer que Tx converge presque sûrement.