# Agrégation interne 2005

# Corrigé de la première épreuve

## I. Nombre de rotations d'une ligne polygonale fermée

**I.1)a)** L'application $u \mapsto \rho(u)^2 + \rho'(u)^2$ est de classe $C^{k-1}$ et strictement positive sur $\mathbf{R}$. Comme $\sqrt{\phantom{x}}$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$, $g$ est de classe $C^k$. D'autre part, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ ; $g$ réalise donc un $C^k$ difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $g(\mathbf{R})$. Enfin, $g'$ est de période $2\pi$ et strictement positive : elle admet donc un minimum $m > 0$ sur $\mathbf{R}$. On en déduit :

- pour $x > 0$, $g(x) \geq mx$ donc $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ;
- pour $x < 0$, $g(x) \leq mx$ donc $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

Ceci prouve que $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ : $g$ est un $C^k$-difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

**I.1)b)** Pour $t \in \mathbf{R}$, on peut écrire :

$$g(t + 2\pi) - g(t) = \int_t^{t+2\pi} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

où $\varphi \;:\; u \mapsto \sqrt{\rho(u)^2 + \rho'(u)^2}$. Comme $\varphi$ est de période $2\pi$, son intégrale sur une période $[a, a + 2\pi]$ est indépendante de $a$, et donc :

$$g(t + 2\pi) - g(t) = \int_t^{t+2\pi} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = g(2\pi).$$

**I.1)c)** La formule de dérivée d'une application composée donne :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}(s) = f' \circ g^{-1}(s) \times \left(g^{-1}\right)'(s) = \frac{f' \circ g^{-1}(s)}{g'(g^{-1}(s))} = \frac{f'\left(g^{-1}(s)\right)}{||f'\left(g^{-1}(s)\right)||}$$

donc $\left|\left|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}(s)\right|\right| = 1$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. Nous noterons $\overrightarrow{T}(s)$ ce vecteur unitaire tangent à $B$ au point d'abscisse curviligne $s$.

$L = \displaystyle\int_0^L \left|\left|\overrightarrow{T}(s)\right|\right| \mathrm{d}s$ est la longueur de la courbe $B$.

**I.1)d)** On a $M(s+L) = f(g^{-1}(s+L)) = f(g^{-1}(s)+2\pi) = f(g^{-1}(s)) = M(s)$ pour tout $s$, donc $M$ est $L$-périodique.

Si $s_2 - s_1 \in L\mathbf{Z}$, on a donc $M(s_2) = M(s_1)$. Réciproquement, supposons que $M(s_1) = M(s_2)$ et notons $t_1$ et $t_2$ les images de $s_1$ et $s_2$ par $g^{-1}$. L'égalité $f(t_1) = f(t_2)$ donne $\rho(t_1) = |f(t_1)| = |f(t_2)| = \rho(t_2)$, puis $\mathrm{e}^{it_1} = \mathrm{e}^{it_2}$ (car $\rho(t_1) \neq 0$), soit $t_2 - t_1 \in \pi\,\mathbf{Z}$ et $s_2 - s_1 \in L\,\mathbf{Z}$.

**I.2)a)** Montrons la propriété par récurrence sur $p$.

- pour $p = 1$ : l'application $M$ réalise une bijection de $[s_1, s_1 + L[$ sur $B$. Comme $N_2 \in B$, il existe un unique $s_2 \in \mathbf{R}$ tel que $s_1 \leq s_2 < s_1 + L$ et $M(s_2) = N_2$.

- soit $p \geq 2$ et supposons la propriété vérifiée au rang $p-1$. Si $N_1, N_2, \ldots, N_{p+1}$ sont des points de $B$ et si $N_1 = M(s_1)$, l'hypothèse de récurrence au rang $p-1$ démontre l'existence et l'unicité d'une suite $(s_2, \ldots, s_p)$ telle que $M(s_{i+1}) = N_{i+1}$ et $s_i \leq s_{i+1} < s_i + L$ pour $1 \leq i \leq p-1$. Il reste à appliquer la propriété au rang 1 aux points $M_p$ et $M_{p+1}$ pour conclure.

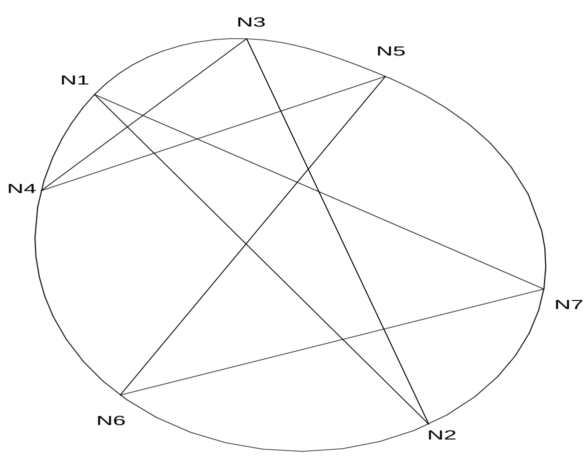
**I.2)b)** Supposons que $M(s'_1) = M(s_1) = N_1$ et notons $(s'_2, \ldots, s'_{p+1})$ associée à ce nouveau choix d'abscisse curviligne de $N_1$. Il existe alors un entier relatif $q$ tel que $s'_1 = s_1 + qL$, et la suite $(s_2+qL, s_2+qL, \ldots, s_{p+1}+qL)$ vérifie les conditions caractérisant $(s'_2, \ldots, s'_{p+1})$. On en déduit que $s'_i = s_i + qL$ pour tout $i$, et en particulier :

$$\frac{s'_{p+1} - s'_1}{L} = \frac{s_{p+1} - s_1}{L}.$$

L'entier $m$ ne dépend donc pas du $s_1$ choisi, mais uniquement de la suite de points $(N_1, \ldots, N_{p+1})$.

Comme $s_{p+1} < s_p + L \leq s_{p+1} + 2L < \ldots < s_1 + pL$, on a nécessairement $m < p$.

**I.3)**




# II. Théorème de Birkhoff

**II.1)a)** L'application $M$ est de classe $C^k$ sur $\mathbf{R}$, donc $(s, s') \mapsto M(s') - M(s)$ est de classe $C^k$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$.

- l'application $u \mapsto ||u||$ est continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, donc $\psi$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ comme composée d'applications continues.
- l'application $u \mapsto ||u||$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, donc $\psi$ est de classe $C^k$ sur $\Omega$, comme composée d'applications de classe $C^k$ (en remarquant que $M(s') - M(s)$ est non nul pour $(s, s') \in \Omega$).

**II.1)b)** Pour $(s, s') \in \Omega$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s, s') = \frac{\left\langle -\overrightarrow{T}(s)\,,\, \overrightarrow{M(s)M(s')} \right\rangle}{\left|\left|\overrightarrow{M(s')M(s)}\right|\right|} = \cos(\theta)$$

en remarquant que $\left|\left|\overrightarrow{T}(s)\right|\right| = 1$, et en notant $\theta$ l'angle des vecteurs $\overrightarrow{M(s')M(s)}$ et $\overrightarrow{T}(s)$.

Par symétrie, la dérivée partielle $\dfrac{\partial\psi}{\partial s}(s,s')$ est le cosinus de l'angle $\theta'$ que font les vecteurs $\overrightarrow{M(s)M(s')}$ et $\overrightarrow{T}(s')$.

**II.2)a)** Comme $\psi(s+L,s') = \psi(s,s'+L)$ pour tout $(s,s')$, l'application $\psi$ est majorée et sa borne supérieure sur $\mathbf{R}^2$ est égale à la borne supérieure de sa restriction sur le compact $[0,L]^2$. Comme $\psi$ est continue, ce sup est un maximum : $\psi$ admet donc un maximum absolu sur $\mathbf{R}^2$.

**II.2)b)** Soit $(s,s')$ un point en lequel $\psi$ est maximale. Comme $\psi$ est strictement positive sur $\Omega$ et nulle en dehors de $\Omega$, $(s,s')$ est élément de $\Omega$. Les dérivées partielles de $\psi$ en $(s,s')$ (qui existent d'après la question 1.a) sont donc nulles. On en déduit que les angles $\theta$ et $\theta'$ associés aux points $M(s)$ et $M(s')$ sont droits : les tangentes à $B$ en $M(s)$ et $M(s')$ sont orthogonales au segment $[M(s),M(s')]$. En choisissant $M_0$ égal au milieu de $[M(s),M(s')]$ et $u = \overrightarrow{M(s)M(s')}$, nous obtiendrons une trajectoire de type (1,2) :

$$\begin{cases} M_1 = M(s'),\ M_2 = M(s),\ M_3 = M(s'),\dots \\ m = \dfrac{s'+L-s'}{L} = 1 \end{cases}.$$

**II.3)a)** Il suffit de poser :

- $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = L/2$ ;
- $\alpha_{i+1} = \alpha_i + L$ pour $2 \le i \le m$ ;
- $\alpha_{i+1} = \alpha_i$ pour $m+1 \le i \le p-1$.

**II.3)b)** Nous avons $s_1 < s_2 < s_1 + L$ et deux cas se présentent :

- si $s_3 = s_2$, on choisit $s'_2 \in ]s_1,s_2[$ : on a bien $(s_1,s'_2,s_3,\dots,s_p) \in W$ ;
- si $s_3 = s_2 + L$, on choisit $s'_2 \in ]s_2,s_2+L[$ et on a toujours $(s_1,s'_2,s_3,\dots,s_p) \in W$.

Dans les deux cas, les points $A_1 = M(s_1)$, $A'_2 = M(s'_2)$ et $A_3 = M(s_3)$ sont distincts et

$$||\overrightarrow{A_1A_2}|| + ||\overrightarrow{A_2A_3}|| = ||\overrightarrow{A_1A_3}|| < ||\overrightarrow{A_1A'_2}|| + ||\overrightarrow{A'_2A_3}||.$$

Cette dernière inégalité est stricte car $A'_2$ n'est pas sur le segment $A_1A_3$(trois points distincts de $B$ ne sont jamais alignés). On en déduit :

$$F(s_1,\dots,s_p) = ||\overrightarrow{A_1A_2}||+||\overrightarrow{A_2A_3}||+\cdots+||\overrightarrow{A_pA_1}|| < ||\overrightarrow{A_1A'_2}||+||\overrightarrow{A'_2A_3}||+\cdots+||\overrightarrow{A_pA_1}|| = F(s_1,s'_2,s_3,\dots,s_p).$$

La construction précédente se généralise sans problème au cas où il existe $i$ compris entre 1 et $p-2$ tel que $A_i \ne A_{i+1} = A_{i+2}$. Seul le cas $A_{p-1} \ne A_p = A_1$ demande (peut-être) une attention particulière : nous avons ici $s_{p-1} < s_p < s_{p-1}+L$ et $s_p = s_1+(m-1)L$ ou $s_p = mL$. Dans le premier cas, on choisit $s'_p \in ]s_p, s_{p-1}+L[$ ; dans le second, on choisit $s'_p \in ]s_{p-1},s_p[$. On termine alors la preuve comme précédemment.

**II.3)c)** Remarquons tout d'abord que $W$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^p$, puisque c'est l'image réciproque du fermé $[0,L]^{p-1} \times [(m-1)L, mL]$ par l'application continue $(s_1,s_2,\dots,s_p) \mapsto (s_2-s_1, s_3-s_2,\dots,s_p-s_{p-1},s_p-s_1)$. La partie $K = \{(s_1,s_2,\dots,s_p) \in W,\ s_1 \in [0,L]\}$ est compacte car fermée bornée :

- $K$ est l'intersection des fermés $W$ et $[0,L] \times \mathbf{R}^{p-1}$ ;

- $K$ est contenue dans $[0, mL]^p$.

Pour $(s_1, \ldots, s_p) \in W$, il existe un entier relatif $k$ tel que $s_1 - kL \in [0, L]$. On en déduit que $(s_i - kL)_{1 \leq i \leq p} \in K$ et que $\psi(s_1 - kL, s_2 - kL, \ldots, s_p - kL) = \psi(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Ainsi, $\psi$ étant continue, elle sera majorée sur le compact $K$ donc sur $W$, et :

$$\sup_{s \in W} \psi(s) = \sup_{s \in K} \psi(s) = \max_{s \in K} \psi(s).$$

Il existe donc un $s \in W$ en lequel $\psi$ atteint son maximum, qui est strictement positif puisque $\psi$ est positive et non nulle d'après le a).

**II.3)d)** Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ un point en lequel $\psi$ atteint son maximum ; notons $A_i = M(\alpha_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, et prolongeons cette suite en une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ de période $p$. Fixons ensuite un point $M_0$ intérieur au segment $[M(\alpha_p), M(\alpha_1)]$, posons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{M(\alpha_p)M(\alpha_1)}$ et notons $(M_n)_{n \geq 0}$ la trajectoire définie par $(M_0, \overrightarrow{v})$.

• D'après le b), les couples $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_{p-1}, \alpha_p), (\alpha_p, \alpha_1)$ sont éléments de $\Omega$, donc $\psi$ est différentiable au point $\alpha$ et ses dérivées partielles s'annulent en $\alpha$. Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, notons $\theta_1$ (resp. $\theta_2$) l'angle que font les vecteurs $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ et $\overrightarrow{T}(\alpha_i)$ (resp. $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ et $\overrightarrow{T}(\alpha_i)$. D'après la question 1.b., nous avons :

$$0 = \frac{\partial F}{\partial s_i}(\alpha) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2),$$

et donc $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Cette propriété traduit que $M_i = A_i$ pour tout $i \geq 1$ : la trajectoire $(M_n)$ est donc de période $p$.

• comme $s_i < s_{i+1} < s_i + L$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $s_1 + (m-1)L < s_p < mL$ (la suite $(A_1, \ldots, A_p, A_1)$ ne contient pas deux points consécutifs égaux), on en déduit que la suite $(s_1, s_2, \ldots, s_p, s_1 + mL)$ vérifie les conditions de la question I.2.a. pour la ligne polygonale $(M_1, M_2, \ldots, M_p, M_{p+1})$ : le nombre de rotation de cette ligne est donc égale à $m$ : il existe une trajectoire de type $(m, p)$.

# III. Billard elliptique

**III.1)** En dérivant la relation $2a = ||\overrightarrow{OM(s)}|| + ||\overrightarrow{O'M(s)}||$, nous obtenons :

$$\forall s \in \mathbf{R},\ 0 = \frac{\left\langle \overrightarrow{T}(s)\,,\, \overrightarrow{OM(s)} \right\rangle}{\left|\left|\overrightarrow{OM(s)}\right|\right|} + \frac{\left\langle \overrightarrow{T}(s)\,,\, \overrightarrow{O'M(s)} \right\rangle}{\left|\left|\overrightarrow{O'M(s)}\right|\right|} = \left\langle \overrightarrow{T}(s)\,,\, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \right\rangle$$

en notant $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM(s)}}{\left|\left|\overrightarrow{OM(s)}\right|\right|}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{O'M(s)}}{\left|\left|\overrightarrow{O'M(s)}\right|\right|}$.

Nous en déduisons que la tangente à l'ellipse en $M(s)$ est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, qui dirige la bissectrice intérieure du triangle $O'M(s)O$ en $M(s)$ : la tangente est donc la bissectrice extérieure.

**III.2)a)** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $D$. Si $P_1$ et $P_2$ sont deux points de $D$ et si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont deux vecteurs unitaires normaux à $D$, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{n_2} = \varepsilon\, \overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda\, \overrightarrow{u}$. Nous avons alors :

$$\mathcal{E}(D, \overrightarrow{n_2}, P_2) = \left\langle \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{u}\,,\, \varepsilon\, \overrightarrow{n_1} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{O'P_1} + \lambda \overrightarrow{u}\,,\, \varepsilon\, \overrightarrow{n_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OP_1}\,,\, \overrightarrow{n_1} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{O'P_1}\,,\, \overrightarrow{n_1} \right\rangle = \mathcal{E}(D, \overrightarrow{n_2}, P_1)$$

car $\varepsilon^2 = 1$ et $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n_1}$.

**III.2)b)** Fixons $P \in D$ et soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire normal à $D$. Si $M$ est un point de $\mathcal{P}$, $\left\langle \overrightarrow{MP}\,,\ \overrightarrow{n} \right\rangle$ est la “distance algébrique” du point $M$ à la droite $D$ (la valeur est négative si $M$ est dans le demi-plan délimité par $D$ et dirigé par $\overrightarrow{n}$, négative sinon). On en déduit donc :

- l'énergie de $D$ par rapport à $O$ et $O'$ est le produit des distances algébriques de $O$ et $O'$ à $D$ ;
- l'énergie est nulle si et seulement si l'un des points $O$ ou $O'$ est sur $D$ ;
- l'énergie est strictement positive si $O$ et $O'$ sont dans un même demi-plan ouvert délimité par $D$ ;
- l'énergie est strictement négative si $O$ et $O'$ sont séparés par la droite $D$.

**III.3)a)** Remarque : les mesures $\phi(s)$ et $\phi'(s)$ sont définies sans ambuiguïté car les angles mesurés ne sont jamais plats (les tangentes à l'ellipse ne passent jamais par $O$ ou $O'$) : il n'existe aucune valeur de $s$ pour laquelle on pourrait avoir à choisir entre 0 et $\pi$).

En reprenant les notations du 1, l'angle mesuré par $\phi(s)$ (resp. par $\phi'(s)$) est l'angle que font les droites engendrées par les vecteurs $\overrightarrow{T}(s)$ et $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$). D'après le 1., $\phi(s)+\phi'(s) = 0 \bmod (\pi)$, et donc $\phi(s)+\phi'(s) = \pi$ (les mesures $\phi(s)$ et $\phi'(s)$ sont des éléments de $]0,\pi[$).

On en déduit directement :

$$\mathcal{E}(D(s)) = \sin\phi(s)\left\|\overrightarrow{OM(s)}\right\| \times \sin\phi'(s)\left\|\overrightarrow{O'M(s)}\right\| = \sin^2\phi(s)\left\|\overrightarrow{OM(s)}\right\|\,\left\|\overrightarrow{O'M(s)}\right\|.$$

**III.3)b)** L'ellipse est paramétrée, en coordonnées polaires, par : $\theta = t$ et $OM = \rho = \dfrac{b^2}{a - c\cos t}$. L'angle $\phi$ est égal à $\pi - V(s)$, où $V(s)$ est l'angle des vecteurs $\overrightarrow{0M(s)}$ et $\overrightarrow{T}(s)$. La formule usuelle donne la tangente de cet angle $V(s)$ :

$$\tan\phi(s) = -\tan V(s) = -\frac{\rho(t)}{\rho'(t)} = \frac{a - c\cos t}{c\sin t}.$$

en notant $t$ l'antécédent de $s$ par le difféomorphisme $g$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin^2\phi(s) &= \frac{1}{\operatorname{cotan}^2\phi(s)+1} = \frac{(a-c\cos t)^2}{c^2\sin^2 t + (a-c\cos t)^2} = \frac{(a-c\cos t)^2}{c^2+a^2-2ac\cos t}\\
\mathcal{E}(D(s)) &= \sin^2\phi(s)\rho(t)(2a-\rho(t)) = \frac{(a-c\cos t)^2}{c^2+a^2-2ac\cos t} \times \frac{b^2}{a-c\cos t} \times \frac{2a(a-c\cos t)-b^2}{a-c\cos t}\\
&= b^2\,\frac{2a^2-b^2-2ac\cos t}{c^2+a^2-2ac\cos t} = b^2
\end{aligned}$$

**III.4)a)** Nous avons $b^2 = \sin^2\phi(s)\left\|\overrightarrow{OM(s)}\right\|\left\|\overrightarrow{O'M(s)}\right\|$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

**III.4)b)** La relation précédente donne donc :

$$\forall\, s \in \mathbf{R},\ h(s) = \frac{b^2}{\left\|\overrightarrow{OM(s)}\right\|\left\|\overrightarrow{O'M(s)}\right\|}.$$

Comme la fonction $s \mapsto M(s)$ est de classe $C^\infty$ et à valeur dans $\mathbf{C}\setminus\{O,O'\}$, $h$ est de classe $C^\infty$ comme composée de fonctions de classe $C^\infty$ (pour tout $A$, l'application $M \mapsto \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathcal{P}\setminus\{\mathcal{A}\}$). $M$ étant d'autre part $L$-périodique, $h$ l'est également.

Nous avons ensuite, pour $s \in \mathbf{R}$, en notant $t = g^{-1}(s)$ et $\rho\,:\ t \mapsto |f(t)|$ :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s) = -2\frac{b^2}{\rho^2(t)(2a-\rho(t))^2}\,\rho'(t)(a-\rho(t))\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}s}(s)$$

donc $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}(s)$ est du signe de $\rho'(t)(\rho(t)-a)$. Mais le cercle de centre $O$ et de rayon $a$ coupe l'ellipse $\mathcal{E}$ en les deux points d'abscisses curvilgnes $L/4$ et $3L/4$ (comme $\mathcal{E}\ :\ OM + O'M = 2a$, les points de $\mathcal{E}$ vérifiant $OM = a$ sont sur la médiatrice du segment $[O, O']$). Nous obtenons donc les variations suivantes :

- $h$ est strictement décroissante sur $[0, L/4]$ ;
- $h$ est strictement croissante sur $[L/4, L/2]$ ;
- $h$ est strictement décroissante sur $[L/2, 3L/4]$ ;
- $h$ est strictement croissante sur $[3L/4, L]$.

**III.5)** Notons $\rho$ la distance $OM(s)$, $\phi$ l'angle $\phi(s)$, $\phi'$ l'angle $\phi'(s)$, $\overrightarrow{T}$ le vecteur $\overrightarrow{T}(s)$ et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire directement normal à $\overrightarrow{T}$ : $(M(s), \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est le repère de Fresnet au point de paramètre $s$. Nous pouvons alors écrire, en notant $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire normal à $D(s,\theta)$ :

- $\overrightarrow{OM} = \rho\left(-\cos\phi\overrightarrow{T} - \sin\phi\overrightarrow{N}\right)$ ;
- $\overrightarrow{O'M} = (2a-\rho)\left(-\cos\phi'\overrightarrow{T} - \sin\phi'\overrightarrow{N}\right) = (2a-\rho)\left(\cos\phi\overrightarrow{T} - \sin\phi\overrightarrow{N}\right)$ ;
- $\overrightarrow{n} = \pm\left(-\sin\theta\overrightarrow{T} + \cos\theta\overrightarrow{N}\right)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(D(s,\theta)) &= \rho(2a-\rho)\left\langle -\cos\phi\overrightarrow{T} - \sin\phi\overrightarrow{N}\,,\, -\sin\theta\overrightarrow{T} + \cos\theta\overrightarrow{N}\right\rangle\left\langle \cos\phi\overrightarrow{T} - \sin\phi\overrightarrow{N}\,,\, -\sin\theta\overrightarrow{T} + \cos\theta\overrightarrow{N}\right\rangle \\
&= \rho(2a-\rho)(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi)(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\
&= \frac{\mathcal{E}(D(s))}{\sin^2\phi}\,(\sin^2\theta\cos^2\phi - \cos^2\theta\sin^2\phi) \\
&= \frac{b^2}{\sin^2\phi}\,\left((1-\cos^2\theta)\cos^2\phi - \cos^2\theta(1-\cos^2\phi)\right) \\
&= b^2\,\frac{\cos^2\theta - \cos^2\phi}{\sin^2\phi}.
\end{aligned}$$

**III.6)** Nous pouvons écrire $E(s,u) = \dfrac{b^2}{h(s)}(u^2 - 1 + h(s))$, donc $E$ est de classe $C^\infty$ et de période $L$ par rapport à $u$. On en déduit que $E$ est bornée et qu'elle atteint ses bornes (on peut se limiter à étudier $E$ sur le compact $[0, L] \times [-1, 1]$). Si $E$ atteint un extrémum global en un point $(s, u)$ avec $u \in ]-1, 1[$, nous aurons alors :

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u}(s,u) = 2b^2\,\frac{u}{h(s)}$$

et donc $u = 0$. On en déduit que $E$ atteint ses extréma globaux en des points de la forme $(s, -1)$, $(s, 0)$ ou $(s, 1)$, d'où la distinction :

- si $u = 1$ ou $-1$, $D(s,\theta) = D(s)$ et $E = b^2$ ;

- si $u=0$, $E(s,u)=\frac{b^2}{h(s)}(h(s)-1)=F(s)$ : en dérivant cette expression, on obtient $F'(s)=\dfrac{b^2}{h^2(s)}\,h'(s)$, donc $F$ présente les mêmes variations que $h$.

Les valeurs extrémales prises par $E(s,u)$ sont donc les extrema de l'ensemble

$$\{b^2, E(0,0), E(L/4,0), E(L/2,0), E(3L/4,0)\}.$$

Quand $s=0$ ou $s=L$, $\phi(s)=\pm\pi/2$ et $E(s,0)=0$. Quand $s=L/4$ ou $s=3L/4$, $D(s,0)$ est la normale à l'ellipse, i.e. la médiatrice du segment $[O,O']$ : on en déduit que $E(s,0)=-c^2$. Les extrema de la fonctions $E$ sont donc :

- $b^2$, atteint pour $s$ quelconque et $u=\pm 1$, i.e. pour $D(s,u)$ tangente à $\mathcal{E}$ ;
- $-c^2$, obtenue pour la droite $D(L/4,0)$, médiatrice du segment $[0,0']$.

**III.7)a)** Pour $n\geq 1$, choisissons $s$ tel que $M_n=M(s)$ et notons $\theta$ l'angle de la tangente à $\mathcal{E}$ en $M_n$ et de la droite $M_{n-1}M_n$. Alors l'angle de cette même tangente avec la droite $M_{n-1}M_n$ est $\pi-\theta$, ce qui donne :

$$\mathcal{E}(M_{n-1}M_n)=E(s,\cos\theta)=E(s,\cos(\pi-\theta))=\mathcal{E}(M_nM_{n+1})$$

car $E$ est paire par rapport à $u$. On en déduit qu'il y a conservation de l'énergie à chaque rebond : toutes les droites $M_nM_{n+1}$ ont même énergie $E_0$.

**III.7)b)** Soit $b_0=\sqrt{E_0}$ et soit $\mathcal{E}_0$ l'ellipse de foyers $O$ et $O'$ et de demi-petit axe $b_0$. Soit $D$ une droite non tangente à l'ellipse $\mathcal{E}_0$ ; si $D$ coupe l'ellipse, la question 6) prouve que $\mathcal{E}(D)<b_0^2$. Sinon, il existe une tangente $D'$ à $\mathcal{E}_0$ telle que $D'$ soit parallèle à $D$, $O$ et $O'$ étant séparés de $D$ par $D'$. La propriété 2)b) montre alors que l'énergie de $D$ par rapport aux points $O$ et $O'$ est positive et strictement plus grande que celle de $\mathcal{D}'$, i.e. que $\mathcal{E}(D)<b_0^2$. On en déduit que les droites tangentes à $\mathcal{E}_0$ sont exactement les droites $D$ telles que $\mathcal{E}(D)=E_0$ : les droites $M_nM_{n+1}$ sont donc toutes tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}_0$.

# IV. La transformation $T$

**IV.1)** C'est le même résultat qu'à la question III.7) : la droite réfléchie a la même énergie que la droite incidente.

**IV.2)a)** Il suffit d'appliquer la question II.1.b) : $G_1(s,s')=(s,-\cos(\pi-\theta))=(s,\cos\theta)$ et $G_2(s,s')=(s',\cos\theta')$, et donc $T\circ G_1(s,s')=(s',\cos\theta')=G_2(s,s')$.

**IV.2)b)** Nous en déduisons que $\operatorname{Jac}T(s,u)\times\operatorname{Jac}G_1(s,s')=\operatorname{Jac}G_2(s,s')$. Or :

$$\operatorname{Jac}G_1(s,s')=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2} & -\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s'}(s,s')\end{vmatrix}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s'}(s,s')$$

$$\operatorname{Jac}G_2(s,s')=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s'} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial s'^2}(s,s')\end{vmatrix}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s'}(s,s')$$

donc $\operatorname{Jac}T(s,u)=1$ (on admet que $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s'}$ ne s'annule pas).

**IV.3)a)** Nous avons $E(s,u) = \dfrac{b^2}{\sin^2\phi(s)}\,(u^2 - \cos^2\phi(s))$, donc il suffit de poser :

$$U(s,r) = \sqrt{\frac{r}{b^2}\,\sin^2\phi(s) + \cos^2\phi(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{R}$ et $r \in ]0, b^2[$. L'application $U$ ainsi définie est à valeur dans $]0,1[$, de classe $C^\infty$ (car $\phi$ l'est) et vérifie bien $E(s, U(s,r)) = r$ pour tout $(s,r) \in \mathbf{R}\times]0,b^2[$.

**IV.3)b)** Posons $u = U(s,r)$ et $(s',u') = T(s,u)$. Nous avons donc $(T\circ J)(s,r) = (s',u')$ et $T_1(s,U(s,r)) = T_1(s,u) = s'$. Nous avons donc :

$$r = E(s,u) = E(s',u')$$

donc $u' = \pm U(s',r)$ (car pour tout $s'$, $E(s',u_1) = E(s',u_2) \iff u_1^2 = u_2^2$). Comme on admet que $u' = T_2(s,U(s,r)) \geq 0$, on a ensuite $u' = U(s',r)$, ce qui s'écrit :

$$J(T_1(s,U(s,r)),r) = (s', U(s',r)) = (s',u') = (T\circ J)(s,r).$$

**IV.3)c)** Remarquons tout d'abord quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite :

- la fonction $\mu$ est strictement positive (voir par exemple la formule de la question 3.a qui définit $U$).
- $\nu(s)$ est une abscisse du point atteint par la trajectoire partant de $M(s)$ avec une énergie $E_0$.

La relation précédente s'écrit :

$$\forall\,(s,r) \in \mathbf{R}\times]0,b^2[, T_2(s,U(s,r)) = U(T_1(s,U(s,r)),r).$$

La règle de la chaîne permet de dériver cette relation par rapport à $r$ et $s$, pour obtenir les deux nouvelles relations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_2}{\partial u}(s,U)\dfrac{\partial U}{\partial r}(s,r) = \dfrac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\dfrac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\dfrac{\partial U}{\partial r}(s,r) + \dfrac{\partial U}{\partial r}(T_1(s,U),r) & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial T_2}{\partial s}(s,U) + \dfrac{\partial T_2}{\partial u}(s,U)\dfrac{\partial U}{\partial s}(s,r) = \dfrac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial s}(s,U) + \dfrac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\dfrac{\partial U}{\partial s}(s,r)\right) & (2)\end{cases}$$

toujours pour tout $(s,r)$, en notant $U = U(s,r)$ pour simplifier l'écriture. Nous pouvons maintenant passer au calcul demandé :

$$\begin{aligned}(\mu\circ\nu)(s)\nu'(s) &= \frac{\partial U}{\partial r}(T_1(s,U),E_0)\left(\frac{\partial T_1}{\partial s}(s,U) + \frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0)\right)\\ &= \frac{\partial U}{\partial r}(s,r)\left(\frac{\partial T_2}{\partial u}(s,U) - \frac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\right)\left(\frac{\partial T_1}{\partial s}(s,U) + \frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0)\right)\end{aligned}$$

en notant $U = U(r,E_0)$ et en utilisant la relation (1). Il est maintenant temps de se souvenir que le déterminant jacobien de $T$ est égal à 1, i.e. que $\dfrac{\partial T_1}{\partial s}(s,U)\dfrac{\partial T_2}{\partial u}(s,U) = 1 + \dfrac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\dfrac{\partial T_2}{\partial s}(s,U)$, ce qui permet d'écrire, en utilisant la relation (2) :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial T_2}{\partial u}(s,U) - \frac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\right)\left(\frac{\partial T_1}{\partial s}(s,U) + \frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0)\right)\\ =\;& 1 + \frac{\partial T_2}{\partial s}(s,U)\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U) + \frac{\partial T_2}{\partial u}(s,U)\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0) - \frac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial T_1}{\partial s}(s,U)\\ &\quad - \frac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\left(\frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\right)^2\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0)\\ =\;& 1 + \frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\underbrace{\left[\frac{\partial T_2}{\partial s}(s,U) + \frac{\partial T_2}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0) - \frac{\partial U}{\partial s}(T_1(s,U),r)\left(\frac{\partial T_1}{\partial s}(s,U) + \frac{\partial T_1}{\partial u}(s,U)\frac{\partial U}{\partial s}(s,E_0)\right)\right]}_{=0}\\ =\;& 1\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\forall s \in \mathbf{R},\ (\mu \circ \nu)(s)\nu'(s) = \frac{\partial U}{\partial r}(s,r) = \mu(s).$$

**IV.4)** Comme $\mu$ est continue, $\chi$ est dérivable et $\chi'(s) = \mu(s)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. On en déduit :

$$\forall\, s \in \mathbf{R},\ (\chi \circ \nu - \chi)'(s) = (\mu \circ \nu)(s)\, \nu'(s) - \mu(s) = 0$$

ce qui prouve que $\chi \circ \nu - \chi$ est constante sur $\mathbf{R}$ : il existe donc un réel $\chi_0$ (ne dépendant que de $E_0$) tel que $\chi \circ \nu(s) = \chi(s) + \chi_0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

S'il existe une trajectoire périodique pour laquelle les droites $M_nM_{n+1}$ sont toutes tangentes à $B'$, l'énergie de toutes ces droites par rapport aux points $O$ et $O'$ est égal à $E_0$. Notons $s_0$ une abscisse curviligne de $M_0$, $u_0$ le cosinus de l'angle que fait la droite $M_0M_1$ avec le vecteur tangent $\overrightarrow{T}(s_0)$, et définissons les suites $(s_n)$ et $(u_n)$ par récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ (s_{n+1}, u_{n+1}) = T(s_n, u_n).$$

Quitte à changer le sens de parcours de la trajectoire périodique, on peut supposer que $u_0 \geq 0$, ce qui donne $u_0 = U(s_0, E_0)$, puis $u_n = U(s_n, E_0)$ pour tout $n \geq 1$ (propriété 3.b) et enfin $s_{n+1} = \nu(s_n)$ pour tout $n \geq 0$. Nous obtenons donc :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \chi(s_{n+1}) = \chi(s_n) + \chi_0.$$

Si $(m,p)$ est le type de la trajectoire, nous pouvons écrire :

$$p\chi_0 = \chi(s_p) - \chi(s_0) = \int_{s_0}^{s_0+mL} \mu(t)\,\mathrm{d}t = m \int_0^L \mu(t)\,\mathrm{d}t = m\,\chi(L)$$

car $\mu$ est de période $L$ ($U$ est de période $L$ par rapport à $s$). Ainsi, $\chi_0$ et $\chi(L)$ sont *commensurables*, i.e. que leur rapport est rationnel.

Réciproquement, supposons que $\chi_0$ et $\chi(L)$ sont commensurables. Comme $0 < \nu(0) < L$, nous pouvons écrire $\chi_0 = \chi(\nu(0)) - \chi(0) = \int_0^{\nu(0)} \mu(t)\mathrm{d}t$ puis $0 < \chi_0 < \int_0^L \mu(t)\mathrm{d}t = \chi(L)$. Il existe donc deux entiers naturels $0 < m < p$ tels que $p\chi_0 = m\,\chi(L)$. Soit alors $(M_n)$ une trajectoire telle que les droites $M_nM_{n+1}$ soient tangentes à $B'$ (il suffit pour cela que la première droite $M_0M_1$ le soit). Notons encore $s_0$ une abscisse curviligne de $M_0$ et $u_0$ le cosinus de l'angle que fait la droite $M_0M_1$ avec le vecteur tangent $\overrightarrow{T}(s_0)$. Deux cas sont alors à envisager :

- Si $u_0$ est positif, il est possible de reprendre la construction précédente : les point $M_n$ sont représentés par les abscisses curvilignes $s_n$ définies par récurrence : $s_{n+1} = \nu(s_n)$ pour tout $n \geq 0$. Nous avons alors, pour $n$ entier naturel quelconque, $\chi(s_{n+1}) = \chi(s_n) + \chi_0$, puis

  $$\chi(s_{n+p}) = \chi(s_n) + p\chi_0 = \chi(s_n) + m\chi(L) = \chi(s_n + mL).$$

  La fonction $\chi$ étant strictement croissante, cela donne $s_{n+p} = s_n + mL$, et donc $M_{n+p} = M_n$ pour tout $n$ et la trajectoire est périodique.

- Si $u_0$ est strictement négatif, considérons la trajectoire $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par $P_0 = M_1$ et $P_1 = M_0$. Cette trajectoire correspond au cas précédent (comme $P_0P_1$ est tangente à $B'$, toutes les droites $P_nP_{n+1}$ sont aussi tangentes à $B'$) : elle est donc périodique de période $p$, ce qui prouve que $(M_n)$ est également périodique de période $p$. En effet, $P_p = M_1$ et $P_{p+1} = M_0$ donne $P_{p-1} = M_2$, et plus généralement $(M_n)_{n\geq 0} = (P_1, P_0, P_{p-1}, P_{p-2}, \ldots, P_2, P_1, P_0, \ldots)$.

Nous avons donc obtenu la C.N.S. suivante :

Pour qu'il existe une trajectoire périodique "tangente" à $B'$, il faut et il suffit que $\chi(L)$ et $\chi_0$ soient commensurables. Dans ce cas, toutes les trajectoires tangentes à $B'$ sont périodiques de même période.