DODÉCAÈDRE

Si z est un nombre complexe, son conjugué est noté $\overline{z}$. $Re(z)$ désigne sa partie réelle.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien E est noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et la norme associée est notée $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$.
$SO(E)$ désigne le groupe des isométries directes (i.e. de déterminant égal à $+1$) de l'espace euclidien E, et 1_E l'application identique de E dans lui-même.
La distance entre deux points M et N d'un espace affine euclidien est notée $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$.
Si n est élément de $\mathbb{N}^*$, $[1..n]$ désigne l'ensemble des entiers naturels de 1 à n.

Préambule. Rappels sur les isométries directes en dimension trois

E désigne ici un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $GL(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E.
Soit f un élément de $GL(E)$, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe et soit M la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$. On rappelle que f est élément de $SO(E)$ si et seulement si la matrice M est orthogonale directe. Dans ce cas, et sous réserve que f ne soit pas égal à 1_E, f est une rotation ; elle est alors caractérisée par un axe, déterminé et orienté par un vecteur $\mathbf{u}$ non nul, et un angle θ, orienté autour de cet axe, déterminé par sa mesure, encore notée θ, qui est un réel défini à 2π près. On note alors : $f = Rot(\mathbf{u}, \theta)$.

1. On pose $M = [m_{i,j}]$ pour $(i, j) \in [1..3]^2$.
   Rappeler des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de M pour qu'elle soit orthogonale directe.

   Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f n'est pas égale à 1_E et que les conditions précédentes sont réalisées.
2. Indiquer comment trouver un vecteur $\mathbf{u}$.
3. Montrer que la trace de la matrice M vérifie :
   $$tr(M) = 1 + 2\cos\theta$$
   À quelle condition f est-elle un demi-tour ?
4. On suppose que f n'est pas un demi-tour ; soit $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque non colinéaire à $\mathbf{u}$.
   Montrer que le produit mixte $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), \mathbf{u})$ est non nul et que son signe est celui de $\sin\theta$.

Partie I . Étude du pentagone régulier

E désigne, dans cette partie seulement, un espace vectoriel euclidien de dimension deux.
On pose :
$$\omega = e^{2i\pi/5}$$
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien associé à E et soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$. On dit que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *pris dans cet ordre* forment un *pentagone régulier* si et seulement si il existe un point O de $\mathcal{P}$, un réel strictement positif r, et un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de $\mathcal{P}$ tels que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 aient respectivement pour affixes les complexes :
$$r\omega^k, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

O, r et le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ sont alors déterminés de manière unique. On appellera dans la suite pentagone régulier noté plus brièvement $A_0A_1A_2A_3A_4$ tout à la fois l'ensemble ordonné des cinq points ainsi obtenus et appelés *sommets* du pentagone régulier dans $\mathcal{P}$ et l'ensemble ordonné des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_4}$ de E.
On dit alors que, pour k variant de 0 à 3, A_k et A_{k+1} sont des sommets *consécutifs*, ainsi que A_4 et A_0. O est le *centre* du pentagone régulier.

1. On suppose ici $r = 1$ et on pose : $a' = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = Re(\omega)$.
   (a) Montrer que ω vérifie la relation :
   $$1 + (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^2 + \overline{\omega}^2) = 0$$
   En déduire que : $a' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
   (b) On pose $a = 2a'$ et $b = \dfrac{1}{a}$. Montrer que a est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$; montrer qu'il en est de même pour b.
   (c) Calculer a, b, $a + b$, $b - a$ et $a^2 + b^2$.
   (On mettra les résultats sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels.)
   (d) Calculer en fonction de b le rapport :
   $$p = \frac{\left\|\overrightarrow{A_0A_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{A_0A_1}\right\|}$$

2. Soit $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$ tel que les points M_k, pour k variant de 0 à 4, soient deux à deux distincts ; il résulte de ce qui précède que les conditions (a) et (b) suivantes sont nécessaires pour que $M_0M_1M_2M_3M_4$ soit un pentagone régulier :
   (a) Il existe un point O de $\mathcal{P}$ et un réel strictement positif r tels que les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent au cercle de centre O et de rayon r.
   (b) Les distances $\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{M_2M_3}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{M_3M_4}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{M_4M_0}\right\|$ sont toutes égales.

   Montrer qu'elles ne sont pas suffisantes (si $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ définit un pentagone régulier, on pourra considérer $(M_0, M_2, M_4, M_1, M_3)$) ; montrer que c'est toutefois bien le cas si on précise dans la condition (b) que ces distances sont égales à :
   $$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$
   (on pourra étudier à l'aide de coordonnées polaires la fonction $M \mapsto \left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|$ définie sur un demi-cercle dont M_0 est l'une des extrémités).

3. On désigne par Γ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$ conservant l'ensemble des cinq sommets d'un pentagone régulier.
   (a) Montrer que les éléments de Γ autres que l'identité sont des rotations de centre 0 et que Γ est un sous-groupe du groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ des déplacements de $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(E)$. Déterminer le cardinal de Γ.
   (c) Montrer que Γ est cyclique. Par lesquels de ses éléments est-il engendré ?

Partie II. Mise en place du dodécaèdre

Pour toute la suite du problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien associé à E, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.
On définit les huit sommets $ABCDA'B'C'D'$ d'un cube noté $\mathcal{C}_0$ comme suit par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$:

$$A = (1,1,1), B = (-1,1,1), C = (-1,-1,1), D = (1,-1,1)$$

A', B', C', D' désignent leurs symétriques respectifs par rapport à O.

1. (a) Montrer l'existence d'un point unique $J = (a, 0, b')$ avec $b' > 1$ tel que

$$\left\|\overrightarrow{JA}\right\| = \left\|\overrightarrow{JD}\right\| = 2a$$

   et exprimer b' en fonction de b.

   (b) I désigne le transformé de J dans le demi-tour d'axe $(O, \mathbf{k})$. I' et J' sont les transformés respectifs de I et J dans la symétrie par rapport à O. Déterminer les points I, I', J' par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

2. On définit de même K, L, M, N ainsi que leurs symétriques respectifs K', L', M', N' par rapport à O par les conditions suivantes :

   (a) $\overrightarrow{KL} = 2a\mathbf{j}$, $\left\|\overrightarrow{KB'}\right\| = \left\|\overrightarrow{KD}\right\| = 2a$, K et L se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O, \mathbf{i})$ et la première coordonnée de K est supérieure à 1.

   (b) $\overrightarrow{MN} = 2a\mathbf{k}$, $\left\|\overrightarrow{NA}\right\| = \left\|\overrightarrow{NB}\right\| = 2a$, M et N se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O, \mathbf{j})$ et la seconde coordonnée de N est supérieure à 1.

   Préciser en fonction de a et b les coordonnées de ces huit nouveaux points.

3. L'ensemble des vingt points A, B, C, D, I, J, K, L, M, N, A', B', C', D', I', J', K', L', M', N' ainsi définis déterminent un *dodécaèdre* qui sera considéré à la fois comme ensemble de vingt points de $\mathcal{E}$ appelés sommets ou comme ensemble de vingt vecteurs de E : $\overrightarrow{OA}$, ..., $\overrightarrow{ON'}$.

   On dira que deux sommets sont *opposés* si et seulement si ils se correspondent dans la symétrie par rapport à O ; ainsi, les paires $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$, ..., $\{N, N'\}$ sont formées de sommets deux à deux opposés.

   On dit que le cube $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$ est *inscrit* dans le dodécaèdre.

   On appelle *face* du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles ordonnés de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

   ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à O.

   Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.

   (On pourra commencer par établir qu'une telle équation est de la forme $\alpha x + \beta z = \gamma$ puis déterminer les coefficients en fonction de a et b.) Donner de même une équation de la face $ANBIJ$.

4. (a) Déterminer les coordonnées de O_1, isobarycentre de la face $AJDKL$ et de O_2, isobarycentre de la face $ANBIJ$.

   (N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels).

(b) Vérifier que $\overrightarrow{OO_1}$ définit un vecteur normal à la face $AJDKL$.

(c) Montrer que la face $AJDKL$ du dodécaèdre est un pentagone régulier (on pourra utiliser la question I.2). Il en est de même pour les autres faces, ce que l'on admettra.

(d) Déterminer par son cosinus l'angle (non orienté) des vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2}$.

Partie III. Matrice de Gram et isométries

1. On appelle *simplexe* un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$, déterminé par trois sommets consécutifs X, Y, Z de l'une des faces du dodécaèdre et pris dans un ordre tel que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$ soit une base directe de E. Un tel simplexe est noté $[XYZ]$.
Ainsi $[AJD]$ est un simplexe.
Combien les sommets du dodécaèdre déterminent-ils de simplexes ?

2. On appelle *matrice de Gram* associée à un triplet $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ d'éléments de E la matrice :

$$Gram(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = [g_{i,j}]$$

de coefficient générique $g_{i,j}$, $(i,j) \in [1..3]^2$, défini par :

$$\forall (i,j) \in [1..3]^2, g_{i,j} = \langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle$$

Calculer la matrice de Gram associée au simplexe $[AJD]$; on donnera ses coefficients sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y entiers.
N.B. On pourra admettre que tous les simplexes définissent la même matrice de Gram, notée $\mathcal{G}$.

3. (a) Montrer qu'étant donné deux des simplexes précédents, soit $\mathcal{S} = [XYZ]$ et $\mathcal{S}' = [X'Y'Z']$, il existe un automorphisme $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ unique de E transformant le premier en le second.

(b) Montrer que cet automorphisme est orthogonal, i.e. qu'il vérifie :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \left\| f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}(\mathbf{u}) \right\| = \|\mathbf{u}\|$$

On pourra utiliser l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x,y,z) \mapsto \left\| x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'} \right\|^2$$

en exprimant sa valeur à l'aide de la matrice $\mathcal{G}$ et de la matrice colonne :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ est une rotation.

(d) On désigne par G l'ensemble des automorphismes directs de E conservant le dodécaèdre, considéré ici comme ensemble des vecteurs

$$\overrightarrow{OA}, \ldots, \overrightarrow{ON'}$$

On pourra admettre que les faces du dodécaèdre sont transformées en des faces par les éléments de G.
Montrer que G est un sous-groupe de $SO(E)$ de cardinal au plus égal à 60.

4. On considère les endomorphismes r, s et t de E définis par leurs matrices respectives dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:
$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$
et
$$T = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que r, s et t sont des rotations qu'on écrira sous la forme $Rot(\mathbf{u}, \theta)$ en précisant $\mathbf{u}$ et θ dans chaque cas.
   N.B. On choisira dans chaque cas un vecteur $\mathbf{u}$ dont la troisième coordonnée soit positive et on désignera par Ω le milieu de AJ.
   (b) Dire brièvement ce que sont les effets respectifs de ces rotations sur le simplexe $[AJD]$.
   (c) Quels sont les ordres respectifs de ces rotations dans le groupe $SO(E)$?
5. (a) On donnera sous forme d'un tableau à double entrée à trois lignes et douze colonnes la liste des transformés respectifs de $ABCDIJKLMN$ par r, s et t (on ne fera pas figurer les éventuels calculs sur la copie).
   (b) Préciser comment obtenir simplement les transformés des dix autres points à l'aide du tableau précédent.
   (c) En déduire que r, s, t sont bien des éléments de G.
6. En mettant brièvement en évidence d'autres éléments de G analogues à r, s, t, en déduire que le cardinal de G est égal à 60.

Partie IV. Isomorphisme de G et de $\mathcal{A}_4$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La notation $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $[1..n]$. ε désigne l'unique morphisme surjectif du groupe $\mathcal{S}_n$ sur le groupe multiplicatif à deux éléments $U_2 = \{-1\} 1$ et qui prend la valeur -1 pour les transpositions. Si σ est un élément quelconque de $\mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.
La notation $\mathcal{A}_n$ désigne le groupe des permutations paires de l'ensemble $[1..n]$; c'est le noyau de ε.
Si p est un entier au moins égal à 2 et au plus égal à n, et si a_1, a_2, ..., a_p sont des éléments distincts de $[1..n]$, la notation $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ désigne le p-cycle envoyant a_i sur a_{i+1} pour i variant de 1 à $p-1$ et a_p sur a_1, les autres éléments étant fixes.
Ces notions et notations s'étendent au cas du groupe des permutations d'un ensemble quelconque fini non vide.
Si $ABCDE$ est un pentagone régulier, on appelle diagonale du pentagone tout segment déterminé par deux sommets non consécutifs ; ainsi, chaque pentagone régulier possède cinq diagonales.

1. Rappeler sans démonstration le cardinal de $\mathcal{A}_5$.
2. On appelle *f-diagonale* du dodécaèdre une diagonale de l'une quelconque des faces du dodécaèdre.
   Ainsi, AB, BD', KJ sont par exemple des f-diagonales. On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des f-diagonales.
   Quel est le cardinal de $\mathcal{D}$?
3. On met ici en évidence l'existence de cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Le cube initial est noté $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$.

(a) On désigne par $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ le cube déduit de $\mathcal{C}_0$ par s^i. Montrer qu'on obtient ainsi cinq cubes distincts inscrits dans le dodécaèdre et que chaque arête de l'un de ces cinq cubes est un élément de $\mathcal{D}$.

(b) Montrer que chaque élément de $\mathcal{D}$ est arête de l'un de ces cinq cubes et un seul (on pourra raisonner sur la seule f-diagonale AD).

(c) En déduire que les cinq cubes $\mathcal{C}_i$ sont les seuls cubes de centre 0 et isométriques à $\mathcal{C}_0$ inscrits dans le dodécaèdre.

4. (a) Montrer que tout élément f de G permute l'ensemble $\mathcal{K}$ des cinq cubes précédents. On désigne par Φ l'application ainsi définie de G dans le groupe $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ des permutations de $\mathcal{K}$. On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des permutations paires de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$.

(b) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.

(c) Expliciter par un tableau à double entrée à trois lignes et cinq colonnes l'effet produit par r, s, t sur les cubes $\mathcal{C}_i$, $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

(d) Montrer que $\Phi(r)$, $\Phi(s)$, $\Phi(t)$ sont des permutations paires de $\mathcal{K}$.

5. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k}))$ pour qu'un élément f de $SO(E)$ laisse le cube $\mathcal{C}_0$ globalement invariant (on pourra considérer les axes des faces de ce cube).

(b) En déduire que le cardinal du sous-groupe G_0 de G constitué des isométries directes laissant globalement invariant le cube $\mathcal{C}_0$ (c'est le *stabilisateur* de $\mathcal{C}_0$ dans G) est égal à 12 et préciser l'ensemble de ses éléments.

(c) Montrer que, pour tout i de 1 à 4, le stabilisateur G_i de $\mathcal{C}_i$ dans G est un sous-groupe de G isomorphe à G_0.

(d) Préciser $G_0 \cap G_1$ puis $G_0 \cap G_1 \cap G_2$.
En déduire que Φ est injectif.

6. (a) Soit S un sous-groupe de $\mathcal{S}\mathcal{K}$; on note :

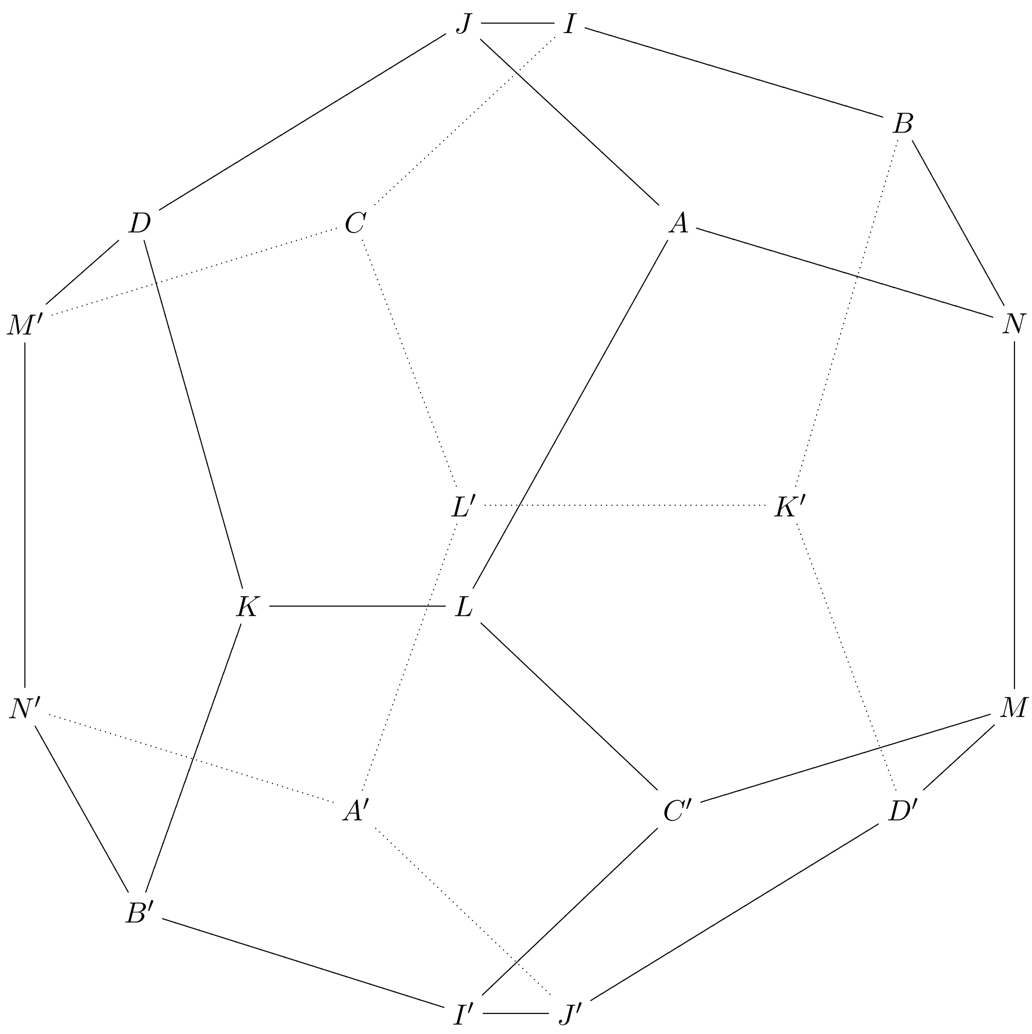
$$S_+ = S \cap \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \text{ et } S_- = S \cap (\mathcal{S}_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$$

Montrer que, si S_- est non vide, alors S_+ et S_- ont même cardinal ; en déduire que, si $\Phi(G)$ possède un élément impair, alors il en contient nécessairement 30.

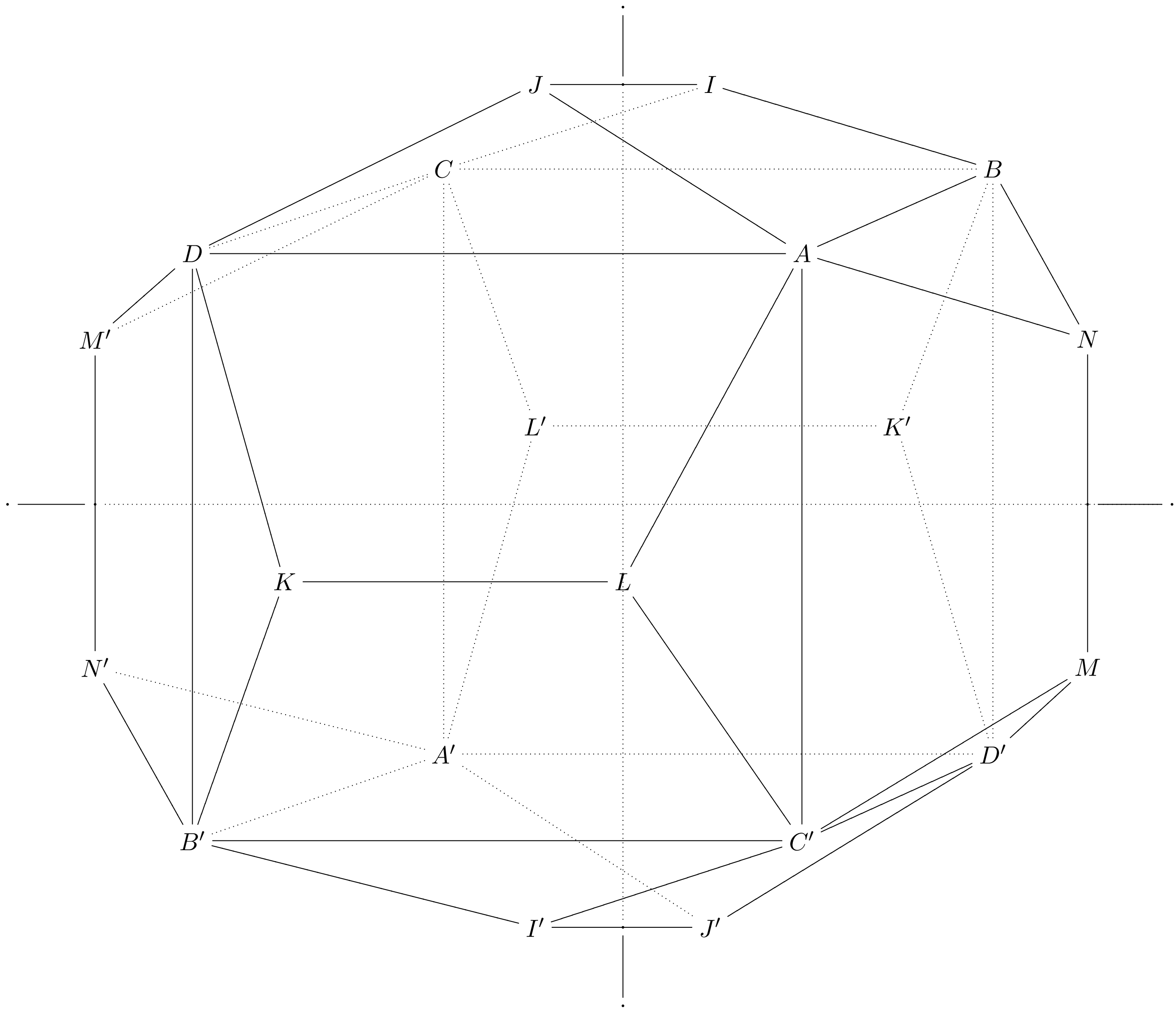
(b) Montrer que, si f est un élément de G tel que : $\varepsilon(\Phi(f)) = -1$, alors f est d'ordre pair dans G.

(c) En déduire, en utilisant les ordres des éléments de G, étudiés dans III.6, que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

7. Combien y a-t-il d'éléments de G transformant l'un quelconque des cinq cubes en un autre ?



Le dodécaèdre construit au II



Construction du dodécaèdre