

I. Préambule

L'objet de ce problème est d'établir l'existence de sous-espaces vectoriels fermés invariants pour certaines classes d'opérateurs linéaires sur l'espace des séries de carré sommable. Le cas des espaces réels est considéré dans les quatre premières parties. Les deux dernières parties concernent le cas complexe.

On notera $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes respectivement. $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $\mathbb{Z}$, telle que les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$$

soient convergentes. On écrit alors que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| < \infty$$

et de plus l'on note

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$$

Les quatre premières parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

I. Distance à un convexe fermé

On note $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel réel des suites $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels indexées par $\mathbb{Z}$ telles que

$$\|x\| = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \right]^{1/2} < \infty$$

On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$. Pour $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_k$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

1. Soient u et v deux éléments de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

2. L'objet de cette question est de montrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est complet pour la norme définie ci-dessus. Soit $(v(n))_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe donc $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $n, l \geq N(\epsilon)$, alors

$$\|v(n) - v(l)\| \leq \epsilon$$

a) Montrer qu'alors on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tous $n, l \geq N(\epsilon)$

$$|v(n)_k - v(l)_k| \leq \epsilon$$

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left[\sum_{|k| \geq K} v(N(\epsilon))_k^2 \right]^{1/2} \leq \epsilon$$

d) Montrer que pour tout $L \geq K$, on a

$$\left[\sum_{L \geq |k| \geq K} v_k^2 \right]^{1/2} \leq 3\epsilon$$

e) En déduire que l'on a $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v(n) - v\| = 0$$

et donc que l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

3. Soit C un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit $(v(n))_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de C telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v(n)\| = d$$

où $d = \inf\{\|v\|; v \in C\}$

a) Montrer que pour tous $n, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \frac{1}{2}(v(n) - v(l)) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|v(n)\|^2 + \|v(l)\|^2) - d^2$$

b) Montrer qu'il existe un unique point $v \in C$ tel que $\|v\| = d$.

4. On note ∂C la frontière de C , c'est-à-dire l'intersection de C et de l'adhérence de son complémentaire $\ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$. On suppose dans cette question que C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $\ell^2(\mathbb{Z})$, différent de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$.

a) Montrer que l'ensemble $\partial C \setminus \{0\}$ est non vide.

b) Montrer qu'il existe $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que

$$0 < \inf\{\|v - x\|; x \in C\} < \|v\|$$

c) En déduire qu'il existe $p \in \partial C \setminus \{0\}$ tel que

$$\|v - p\| = \inf\{\|v - x\|; x \in C\}$$

d) Montrer que pour tout $q \in C$, on a

$$\langle v - p, q - p \rangle \leq 0$$

II. Exponentielles d'opérateurs

1. Soit T une application linéaire de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même. Montrer l'équivalence des trois conditions suivantes :

(i) T est une application continue en tout point de $\ell^2(\mathbb{Z})$;

(ii) T est continue en 0 ;

(iii) l'ensemble $\{\|T(x)\|; \|x\| \leq 1\}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

On désigne par $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ l'ensemble des applications linéaires continues de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même. Pour $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$, on pose $\|T\|_L = \sup\{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\}$

2. a) Montrer que $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ est un espace vectoriel et que la fonctionnelle $\|\cdot\|_L$ est une norme sur $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$

b) Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans l'espace $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ normé par $\|\cdot\|_L$. Montrer que pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la suite $(T_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

c) En déduire que l'espace $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_L$.

3. Soient S et $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. On note TS l'élément de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ obtenu en composant S avec T ; on a donc $TS = T \circ S$. Soit $I \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ l'application identité définie par $I(x) = x$ pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pour tout $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$, on définit T^j par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, par $T^0 = I$ et $T^{j+1} = T^j$.

a) Montrer que l'on a $\|TS\|_L \leq \|T\|_L \|S\|_L$.

b) Pour tout entier $K \geq 0$, on pose

$$S_K(T) = \sum_{j=0}^K \frac{1}{j!} T^j$$

Montrer que la suite $(S_K(T))_{K \geq 0}$ converge dans l'espace $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

c) On pose

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(T) = \text{Exp}(T)$$

Montrer que si A et B sont deux éléments de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ tels que $AB = BA$, alors

$$\text{Exp}(A + B) = \text{Exp}(A) \text{Exp}(B)$$

On pourra établir tout d'abord l'inégalité suivante :

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A+B)^k - \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} B^l \right) \right\|_L \leq \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \|A\|_L^j \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} \|B\|_L^l \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\|A\|_L + \|B\|_L)^k$$

III. Cônes fermés et sous-algèbres

On appellera sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ un sous-espace vectoriel A de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ tel que pour tout couple (S, T) d'éléments de A , on a $ST \in A$.

1. Soit D l'ensemble constitué des applications linéaires T telles qu'il existe une suite bornée $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels telle que, pour tout $v = (v_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on a

$$T(v)_k = t_k v_k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que D est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

2. On note P le sous-ensemble de $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par

$$P = \{v = (v_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}) ; v_k \in \mathbb{R}^+ \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $T \in D$.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in P$, on ait $\lambda x - T(x) \in P$ et $\lambda x + T(x) \in P$.

3. Plus généralement, on appelle *cône fermé* un sous-ensemble convexe fermé Q de $\ell^2(\mathbb{Z})$ tel que pour tout $x \in Q$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $(tx) \in Q$. On note

$$A_Q = \{T \in L(\ell^2(\mathbb{Z})) ; \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \lambda x - T(x) \in Q \text{ et } \lambda x + T(x) \in Q \text{ pour tout } x \in Q\}$$

Montrer que A_Q est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

4. Soit Q un cône fermé.

a) Montrer que si $S \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ satisfait $S(Q) \subset Q$, alors $\text{Exp}(S)(Q) \subset Q$.

b) En déduire que si $T \in A_Q$, alors $\text{Exp}(T)(Q) \subset Q$.

IV. Construction de sous-espaces invariants

Soit A une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. On fait l'hypothèse suivante, notée (H)

Il existe un convexe fermé C_0 de $\ell^2(\mathbb{Z})$, différent de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que pour tout $T \in A$, on a $\text{Exp}(T)(C_0) \subset C_0$.

1. Montrer que si Q est un cône fermé différent de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, l'algèbre A_Q satisfait l'hypothèse (H) .

2. a) Montrer qu'il existe $p \in C_0 \setminus \{0\}$ et $w \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ tels que $\langle w, x - p \rangle \leq 0$ pour tout $x \in C_0$ (on utilisera la question I.4.d).

Pour tout $T \in A$, on définit une fonction ϕ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\phi_T(s) = \langle w, \text{Exp}(sT)(p) \rangle$$

b) Montrer que ϕ_T est une fonction développable en série entière.

c) Montrer que $\phi_T(s) \leq \phi_T(0)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $\langle w, T(p) \rangle = 0$ pour tout $T \in A$.

On continue à désigner par p le vecteur obtenu dans cette question, jusqu'à la fin de la partie IV.

3. Montrer que s'il existe $T \in A$ tel que $T(p) \neq 0$, alors l'adhérence M de l'espace $M_0 = \{T(p); T \in A\}$ est un sous-espace vectoriel fermé, distinct de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(M) \subset M$ pour tout $T \in A$.

4. Montrer que si $T(p) = 0$ pour tout $T \in A$, la droite vectorielle D engendrée par $\{p\}$ vérifie que $T(D) \subset D$ pour tout $T \in A$.

5. En déduire que si A est une sous-algèbre qui satisfait (H) , alors il existe un sous-espace vectoriel fermé V , distinct de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(V) \subset V$ pour tout $T \in A$.

V. Sous-espaces bi-invariants de shifts à poids

On note $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel complexe des suites $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbb{Z}$ telles que

$$\|x\| = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \right]^{1/2} < \infty$$

On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$. Pour $x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ et $y \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_k} y_k$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels vérifiant la propriété suivante, notée (B) :

$$0 < \inf\{\lambda_k ; k \in \mathbb{Z}\} \leq \sup\{\lambda_k ; k \in \mathbb{Z}\} < \infty$$

1. Pour $x = (x_k) \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, on définit une suite $S(x)$ de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$ en posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$S(x)_k = \lambda_{k-1} x_{k-1}$$

Dans le cas particulier où $\lambda_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit S_1 par

$$S_1(x) = x_{k-1}$$

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels satisfaisant (B), et soit S l'opérateur correspondant. Montrer que S définit une application linéaire continue inversible de $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ sur $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, dont l'inverse S^{-1} est également continu.

2. On définit une suite $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de la façon suivante :

(i) $w_0 = 1$;

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{w_{k+1}}{w_k} = \lambda_k$.

Soit F l'espace vectoriel des suites $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbb{Z}$ telles que $\{k \mid y_k \neq 0\}$ soit fini. On considère l'application linéaire $W : F \rightarrow F$ définie par

$$W(y)_k = w_k y_k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$SW(y) = WS_1(y)$$

pour tout $y \in F$.

3. On suppose, dans cette question et jusqu'à la fin de la partie V, que pour tout $k \geq 0$, on a

$$\lambda_{-k-1} = (\lambda_k)^{-1}$$

a) Montrer que $w_k = w_{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soit $E = \{x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) ; x_{-k} = \overline{x_k}\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille $(\epsilon(j))_{j \in \mathbb{Z}}$ de vecteurs de E définie par :

(i) $\epsilon(0)_0 = 1, \epsilon(0)_k = 0$ sinon,

(ii) Si $j \geq 1, \epsilon(j)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si $k = \pm j, \epsilon(j)_k = 0$ sinon,

(iii) si $j \leq -1, \epsilon(j)_k = \frac{i}{\sqrt{2}}$ si $k = j, \epsilon(j)_k = \frac{-i}{\sqrt{2}}$ si $k = -j, \epsilon(j)_k = 0$ sinon,

est orthonormée. En déduire que E est un espace vectoriel réel isométrique à l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$.

4. Pour tout $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in F$, on note $\hat{y}$ le polynôme trigonométrique défini par

$$\hat{y}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{ikt}$$

Montrer qu'alors $y \in E$ si et seulement si $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. On définit les applications linéaires

$$C = \frac{1}{2}[S + S^{-1}] \text{ et } D = \frac{1}{2i}[S - S^{-1}]$$

a) Montrer que $C(E) \subset E$ et que $D(E) \subset E$.

b) On pose

$$P = \{W(y) ; y \in F \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \hat{y}(t) \in \mathbb{R}^+\}$$

Montrer que $P \subset E$ et que, pour tout $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de P , on a $z_0 \geq 0$.

Établir que $(I - C)(P) \subset P$, que $(I + C)(P) \subset P$, que $(I - D)(P) \subset P$ et que $(I + D)(P) \subset P$.

c) En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé M de E , distinct, de $\{0\}$ et de l'espace E , tel que $C(M) \subset M$ et $D(M) \subset M$ (on utilisera en particulier les questions III.4 et IV.5).

6. a) Montrer que si $(u, v) \in E^2$, on a $\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

b) On pose $J = \{u + iv ; (u, v) \in M^2\}$. Montrer que J est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel complexe $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ tel que $S(J) \subset J$ et $S^{-1}(J) \subset J$.

VI. Sous-espaces bi-invariants fonctionnels

On garde les notations et les hypothèses de la partie V, questions 1 et 2. On suppose à présent que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^{-2} < \infty$$

1. Montrer que pour tout $x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |w_k^{-1} x_k| < \infty$$

2. Pour tout $x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Omega(x)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^{-1} x_k e^{ikt}$$

et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on définit

$$M_{t_0} = \{x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \mid \Omega(x)(t_0) = 0\}$$

Montrer que M_{t_0} est un sous-espace fermé de $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de l'espace $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ tout entier.

3. Montrer que $S(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$, et que $S^{-1}(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension finie X de $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ distinct de $\{0\}$ tel que $S(X) \subset X$.

CORRIGÉ

Partie I. Distance à un convexe fermé

1. Cette question consiste à montrer l'identité du parallélogramme. Soit

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \end{aligned}$$

2. a) Écrivons l'hypothèse de cette question :

$$(\star) \quad \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \mid n, l \geq N(\epsilon) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(n)_k - v(l)_k|^2 < \epsilon^2$$

Ainsi, puisque tous les éléments de la dernière série (convergente) sont positifs, il vient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \mid n, l \geq N(\epsilon), \forall k \in \mathbb{Z}, |v(n)_k - v(l)_k| < \epsilon$$

b) La question précédente montre que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(v(n)_k)_n$ est une suite de Cauchy de réels. $\mathbb{R}$ étant complet, cette suite converge lorsque n tend vers ∞ vers un réel v_k .

c) Pour $N(\epsilon)$ fixé, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(N(\epsilon))_k|^2$ converge. Il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que si $|k| \geq K$, on ait :

$$\left[\sum_{|k| \geq K} |v(N(\epsilon))_k|^2 \right]^{1/2} \leq \epsilon$$

d) Dans l'équation $(\star)$, fixons $n = N(\epsilon)$ et faisons tendre l vers l'infini. Il vient :

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(N(\epsilon))_k - v_k|^2 < \epsilon^2$$

Soit $L \geq K$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{L \geq |k| \geq K} v_k^2 &\leq \sum_{L \geq |k| \geq K} |v_k - v(N(\epsilon))_k|^2 + \sum_{L \geq |k| \geq K} |v(N(\epsilon))_k|^2 + 2 \sum_{L \geq |k| \geq K} |v(N(\epsilon))_k| |v_k - v(N(\epsilon))_k| \\ &\leq \sum_{L \geq |k| \geq K} |v_k - v(N(\epsilon))_k|^2 + \sum_{L \geq |k| \geq K} |v(N(\epsilon))_k|^2 \\ &\quad + 2 \left(\sum_{L \geq |k| \geq K} |v(N(\epsilon))_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{L \geq |k| \geq K} |v_k - v(N(\epsilon))_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon^2 + \epsilon^2 + 2\epsilon^2 = 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

e) Faisons tendre L vers l'infini dans la dernière inégalité. La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |v_k|^2$ est donc convergente (son reste tend vers 0), ce qui signifie que $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Enfin, en revenant à l'équation $(\star)$ et en faisant tendre l vers l'infini, il vient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \mid n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(n)_k - v_k|^2 < \epsilon^2$$

ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v(n) - v\| = 0$.

3. a) Utilisons l'identité du parallélogramme avec $u = v(n)$ et $v = v(l)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(v(n) - v(l)) \right\|^2 &= 2\left(\frac{1}{4}\|v(n)\|^2 + \frac{1}{4}\|v(l)\|^2\right) - \frac{1}{2}(\|v(n)\|^2 + \|v(l)\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|v(n)\|^2 + \|v(l)\|^2) - d^2 \end{aligned}$$

par définition de d et convexité de C .

b) Existence. La suite $(v(n))_n$ est une suite de Cauchy de C qui est un fermé de $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui est complet pour la norme $\|\cdot\|$. Ainsi C est lui-même complet et cette suite converge vers $v \in C$. Par définition de d , de $v(n)$ et de la continuité de l'application norme, on a $d = \|v\|$.

Unicité. Supposons qu'il existe $v, w \in C$ tels que $\|v\| = \|w\| = d$. Par l'identité du parallélogramme :

$$\frac{1}{2}\|v - w\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2) - d^2 \leq 0$$

Ainsi $v = w$.

4. a) Soit $v \in C$ (C non vide) et $w \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$ (qui est non vide par hypothèse). Ce dernier ensemble est ouvert : il existe $\rho > 0$ tel que la boule ouverte $B(w, \rho) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$. Notons

$$[v, w] = \{tv + (1 - t)w \mid t \in [0, 1]\}$$

On a alors $[v, w] \cap \partial C \neq \emptyset$. En effet l'application $\varphi : t \mapsto tv + (1 - t)w$ est continue sur $[0, 1]$ et donc φ existe et est atteint en un point de la frontière de C .

- si ce point n'est pas 0, nous avons répondu à la question.
- si ce point est 0, soit $w_1 \in B(w, \rho)$, $w_1 \notin [v, w]$. Alors par le même raisonnement que précédemment $[w_1, v] \cap \partial C$ existe et ce point n'est pas 0, par définition de w_1 .

b) Pour tout $v \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$, alors C étant fermé, $\inf\{\|v - x\| \mid x \in C\} > 0$ (autrement $v \in C$).

Montrons qu'il existe v tel que $\inf\{\|v - x\| \mid x \in C\} < \|v\|$.

- si $0 \in C$, c'est vérifié pour tout $v \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$.
- si $0 \notin C$, alors $0 \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$. Soit $\rho = \frac{2}{3}d(0, C) = \frac{2}{3}\|x_0\|$. Alors $B(0, \rho) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus C$ et $v = [0, x_0] \cap \overline{B}(0, \rho)$ vérifie

$$\|v\| = \rho = \frac{2}{3}d(0, C) > d(v, C) = \frac{1}{3}d(0, C)$$

c) Soit $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On remarque que si C est convexe fermé, alors $v - C = \{v - x \mid x \in C\}$ est convexe fermé. (démonstration quasi immédiate). De plus $d(v, C) = d(0, v - C)$ existe et est atteint en un point $p \in C$ par la question 3.a.

Montrons que $p \in \partial C$. Par l'absurde, si p appartient à l'intérieur de C , il existe une boule $B(p, \rho)$ incluse dans cet intérieur et par un raisonnement identique à celui de la question 4.a. $[v, p] \cap \partial C \neq \emptyset$ en contradiction avec la définition de p .

Enfin $p \neq 0$, car autrement $\|v\| = \inf\{\|v - x\| \mid x \in C\}$ en contradiction avec la question 4.b.

Remarque. Toutes ces questions paraissent « bien compliquées » pour montrer que la distance d'un point de $v \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus U$ à U existe et est atteinte en un point de la frontière ∂U de U .

En effet, on montre comme dans la question 3 que cette distance d existe et est atteinte. En supposant ensuite qu'elle est atteinte en un point u de l'intérieur de U , il suffit de choisir une boule centrée en u de rayon r , contenue dans U . Le segment $[v, u]$ recoupera alors cette boule en un point $w \in U$, en contradiction avec la définition de d .

d) Soit $r \in C$.

$$\|v - r\|^2 = \|v - p\|^2 + \|p - r\|^2 + 2\langle v - p, p - r \rangle$$

Donc, pour tout $r \in C$:

$$-2\langle v - p, r - p \rangle + \|p - r\|^2 \geq 0$$

Tout $q \in C$ peut s'écrire $\lambda r + (1 - \lambda)p$ ($p - q = \lambda(p - r)$), et l'inégalité précédente se réécrit :

$$-2\lambda\langle v - p, q - p \rangle + \lambda^2\|p - q\|^2 \geq 0$$

ceci pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Ce trinôme du second degré en λ étant toujours positif, il vient que

$$\langle v - p, q - p \rangle \leq 0$$

Partie II. Exponentielle d'opérateurs

1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si T est continue en tout point de $\ell^2(\mathbb{Z})$, elle l'est en 0.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Écrivons la continuité de T en 0.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \epsilon$$

Soit $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que $\|x\| \leq 1$. Alors pour $y = \frac{\delta}{2}x$, il vient :

$$\|Ty\| < \epsilon \Rightarrow \|Tx\| < \frac{2\epsilon}{\delta} = M$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Notons $M = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$. On a alors, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

(en divisant x par sa norme)

Ainsi si $x_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$, ce qui montre que T est lipchitzienne, donc continue sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

2. a) Si T, S sont deux endomorphismes continus de $\ell^2(\mathbb{Z})$, pour tout scalaire λ , $\lambda T + S$ est un endomorphisme continu de $\ell^2(\mathbb{Z})$. La fonctionnelle $\|\cdot\|_L$ est une norme (vérification immédiate) appelée norme d'opérateur.

b) Si (T_n) est une suite de Cauchy de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$, on peut écrire :

$$(\star\star) \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \mid n, m \geq N \Rightarrow \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}), \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|_L \|x\| < \epsilon \|x\|$$

Ceci signifie que la suite $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui est complet pour la norme $\|\cdot\|$. Elle converge donc vers un vecteur $T(x) \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

c) Ainsi la suite (T_n) admet une limite simple T . (i.e., pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = T(x)$.)

Dans la relation $(\star\star)$, fixons $n \geq N$ et faisons tendre m vers l'infini. Il vient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid n \geq N \Rightarrow \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}), \|T_n(x) - T(x)\| < \epsilon \|x\|$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \mid n \geq N \Rightarrow \|T_n - T\|_L < \epsilon$$

Ainsi T est la limite de la suite (T_n) dans $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Enfin, T est continu, car

$$\|T\|_L \leq \|T - T_N\|_L + \|T_N\|_L \leq \epsilon + \|T_N\|_L = C$$

3. a) Pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\|TS(x)\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\|_L \|S(x)\| \leq \|T\|_L \|S\|_L \|x\|$$

Donc $\|TS\|_L \leq \|T\|_L \|S\|_L$.

b) Montrons que la suite $(S_K(T))_K$ est une suite de Cauchy de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Or, si $M > K$:

$$\|S_M(T) - S_K(T)\|_L \leq \sum_{j=K+1}^M \frac{1}{j!} (\|T\|_L)^j$$

Ce dernier terme est majoré par le reste d'une série convergente (qui converge vers $e^{\|T\|_L}$), donc peut être rendu aussi petit que l'on veut pour $M > K \geq N_0$. L'espace $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ étant complet, ceci montre que la suite $(S_K(T))_K$ admet une limite dans cet espace.

c) Établissons l'inégalité proposée. Comme les matrices A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A+B)^k - \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} B^l \right) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{A^j B^{k-j}}{j!(k-j)!} - \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{A^j B^l}{j!l!} \\ &= \sum_{0 \leq p+q \leq n} \frac{A^p B^q}{p!q!} - \sum_{0 \leq p,q \leq n} \frac{A^p B^q}{p!q!} \\ &= \sum_{n < p+q \leq 2n} \frac{A^p B^q}{p!q!} \end{aligned}$$

Donc, avec le même raisonnement :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A+B)^k - \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} B^l \right) \right\|_L &= \left\| \sum_{n < p+q \leq 2n} \frac{A^p B^q}{p!q!} \right\|_L \\ &\leq \sum_{n < p+q \leq 2n} \frac{\|A^p B^q\|_L}{p!q!} \leq \sum_{n < p+q \leq 2n} \frac{\|A\|_L^p \|B\|_L^q}{p!q!} \\ &= \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \|A\|_L^j \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} \|B\|_L^l \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\|A\|_L + \|B\|_L)^k \end{aligned}$$

Par les questions précédentes, lorsque n tend vers l'infini, l'expression de droite de l'inégalité ci-dessus a pour limite $\exp(A+B) - \exp(A)\exp(B)$, alors que l'expression de gauche a pour limite $e^{\|A\|_L + \|B\|_L} - e^{\|A\|_L} e^{\|B\|_L}$ qui vaut 0.

Partie III. Cônes fermés et sous-algèbres

1. L'ensemble D n'est pas vide, puisqu'il contient l'application nulle. Si $(S, T) \in D^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe deux suites $(t_k), (s_k)$ bornées telles que $T(v)_k = t_k v_k$ et $S(v)_k = s_k v_k$. On a alors :

$$(\lambda T + S)(v)_k = \lambda t_k v_k + s_k v_k, \text{ avec } (\lambda t_k + s_k) \text{ bornée}$$

et

$$S(T(v))_k = (t_k s_k v_k)$$

Ainsi D est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

2. Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$.

Si $T \in D$, il existe une suite (t_k) bornée par M telle que pour tout $v \in P$, $T(v)_k = t_k v_k$. On a alors :

$$(\lambda v - T(v))_k = \lambda v_k - t_k v_k, \quad (\lambda v + T(v))_k = \lambda v_k + t_k v_k$$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda - L \leq \lambda \pm t_k \leq \lambda + M$, si $\lambda \geq M$, on obtient la relation (ii) .

Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons $e^{(k)}$ l'élément de P défini par :

$$e_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda e^{(k)} \pm T(e^{(k)}) \in P$? cela signifie que pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$-\lambda e_j^{(k)} \leq T(e^{(k)})_j \leq \lambda e_j^{(k)}$$

De par la définition de $e^{(k)}$, ceci se traduit par :

$$T(e^{(k)})_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ -\lambda \leq t_k = T(e^{(k)})_k \leq \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite (t_k) ainsi définie est bornée par λ . Notons S l'application linéaire associée à cette suite et montrons que $T = S$.

Soit $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v^n = (v_{-n}, v_{-n+1}, \dots, v_0, \dots, v_n)$. On a alors

- $v^n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $v^n = \sum_{k=-n}^n v_k e^{(k)}$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v^n - v\| = 0$,
- $T(v^n) = S(v^n) = (t_k v_k)_{-n \leq k \leq n}$.

Par continuité de T , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T(v^n) - T(v)\| = 0$. Par unicité de la limite, il vient $T = S$.

Remarque. On vient en fait de montrer que $(\text{Vect}(e^{(k)}), k \in \mathbb{Z})$ étant dense dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, $T = S$ sur $(\text{Vect}(e^{(k)}), -n \leq k \leq n)$, entraîne que $S = T$ sur tout $\ell^2(\mathbb{Z})$.

3. A_Q n'est pas l'ensemble vide, puisque $0 \in A_Q$ par définition de Q .

Soit $(S, T) \in A_Q^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Il existe $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ tels que pour tout $x \in$, on ait

$$\lambda x \pm T(x) \in Q, \mu x \pm S(x) \in Q$$

En utilisant la convexité de Q et le fait que Q soit un cône, il vient, pour tout $x \in Q$:

$$(\lambda + \mu)x \pm (T + S)(x) = 2 \left(\frac{1}{2}(\lambda + \mu)x \pm \frac{1}{2}(T + S)(x) \right)$$

Si $a > 0$, Q étant un cône $a\lambda x \pm aT(x) \in Q$. Si $a < 0$, $-a\lambda x \mp aT(x) \in Q$. Ceci montre que A_Q est un sous-espace vectoriel de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Enfin, on sait que :

$$\begin{cases} \mu(\lambda x + T(x)) + S(\lambda x + T(x)) \in Q \\ \mu(\lambda x - T(x)) - S(\lambda x - T(x)) \in Q \end{cases}$$

En faisant la demie somme de ces expressions, la convexité de Q donne :

$$\lambda\mu x + ST(x) \in Q$$

Et

$$\begin{cases} \mu(\lambda x - T(x)) + S(\lambda x - T(x)) \in Q \\ \mu(\lambda x + T(x)) - S(\lambda x + T(x)) \in Q \end{cases}$$

donne

$$\lambda\mu x - ST(x) \in Q$$

Ainsi A_Q est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

4. a) On sait Q est un cône fermé et que $S(Q) \subset Q$. Ainsi pour tout $k \geq 0$, $\frac{S^k}{k!}(Q) \subset Q$. Montrons par récurrence sur n que $\sum_{k=0}^n \frac{S^k}{k!}(Q) \subset Q$.

- $(I + S)(Q) = 2 \left(\frac{1}{2}(I(Q) + S(Q)) \right) \subset Q$,
- $\sum_{k=0}^n \frac{S^k}{k!}(Q) = 2 \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S^k}{k!}(Q) + \frac{1}{2} \frac{S^n(Q)}{n!} \right) \subset Q$.

Enfin, Q étant fermé, on a $\text{Exp}(S)(Q) \subset Q$.

b) Si $T \in A_Q$, il existe $\lambda > 0$ tel que $(\lambda I + T)(Q) \subset Q$. Par la question précédente $\text{Exp}(\lambda I + T)(Q) \subset Q$, ou $e^\lambda \text{Exp}(T)(Q) \subset Q$. Donc, en multipliant par $e^{-\lambda} > 0$, on a $\text{Exp}(T)(Q) \subset Q$.

Partie IV. Construction de sous-espaces invariants

1. C'est la question précédente III.4.b.

2. a) On a montré dans la question I.4.d : si C_0 est un convexe fermé de $\ell^2(\mathbb{Z})$, alors

$$\exists v \in \ell^2(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}, \exists p \in C_0 \setminus \{0\} \text{ tel que } \langle v - p, q - p \rangle \leq 0, \forall q \in C_0$$

Choisissons $w = v - p$. Par construction de p et choix de v dans la question I.4, on a $w \neq 0$ qui répond à notre question.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\langle w, \sum_{k=0}^n \frac{s^k T^k(p)}{k!} \right\rangle = \sum_{k=0}^n \langle w, T^k(p) \rangle \frac{s^k}{k!}$$

Or

$$\left\| \langle w, T^k(p) \rangle \frac{s^k}{k!} \right\| \leq \|w\| \|p\| \frac{|s|^k \|T\|^k}{k!}$$

qui est le terme général d'une série convergente. La série définissant $\phi_T(s)$ est ainsi convergente et on peut écrire :

$$\phi_T(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle w, T^k(p) \rangle \frac{s^k}{k!}$$

c) Il vient :

$$\phi_T(s) - \phi_T(0) = \langle w, \text{Exp}(sT)(p) - p \rangle = \langle w, x - p \rangle \leq 0$$

car A est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$, $T \in A$ et par l'hypothèse (H), pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}(sT)(p) \in C_0$.

d) La fonction ϕ_T est de classe C^∞ et admet un minimum en $s = 0$. Sa dérivée en ce point vérifie $\phi'_T(0) = 0$, soit $\langle w, T(p) \rangle = 0$, pour tout $T \in A$.

3. A étant une algèbre, M_0 est un sous-espace vectoriel de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Son adhérence M est un sous-espace vectoriel fermé de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Comme $T(p) \neq 0$, on a $M_0 \neq \{0\}$. Enfin si $M_0 = \ell^2(\mathbb{Z})$, par continuité du produit scalaire et par la question précédente, on a $\langle w, x \rangle = 0$, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, ce qui entraîne que $w = 0$ en contradiction avec sa définition.

Pour terminer, soit $T \in A$, et $S(p) \in M_0$; alors $T(S(p)) \in M_0$ (car A est une algèbre). Par continuité de T , il vient $T(M) \subseteq M$.

4. Si $T(p) = 0$ pour tout $T \in A$, alors $T(D) = \{0\} \subset D$.

5. Si A est une sous-algèbre de $L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ satisfaisant à (H), les deux questions précédentes montrent qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé non trivial (M_0 dans un cas, une droite dans l'autre cas) invariant par tous les éléments de A .

Partie V. Sous-espaces bi-invariants de shifts à poids

1. L'application S est manifestement linéaire.

Notons $0 < m = \inf\{\lambda_k ; k \in \mathbb{Z}\} \leq M = \sup\{\lambda_k ; k \in \mathbb{Z}\} < \infty$. Soit $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$; alors

$$|\lambda_k x_k| \leq M |x_k| \Rightarrow \|S(x)\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda_k x_k|^2 \leq M^2 \|x\|^2$$

L'endomorphisme S est donc continue de norme $\|S\|_L \leq M$.

Pour montre que S est inversible, il suffit d'exhiber son inverse, soit

$$S^{-1} : (y_k) \longmapsto \frac{1}{\lambda_k} y_{k+1}$$

(on a bien $(x_k) \rightarrow (\lambda_{k-1} x_{k-1}) \rightarrow \frac{1}{\lambda_k} (\lambda_k x_k) = (x_k)$.)

L'application S^{-1} est continue car $\left| \frac{1}{\lambda_k} y_{k+1} \right| \leq \frac{1}{m} |y_{k+1}|$, donc :

$$\|S^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m} \|y\|$$

2. On a, pour tout $y \in F$:

$$SW(y) = (\lambda_{k-1} w_{k-1} y_{k-1}) = (w_k y_{k-1}) = WS_1(y)$$

3. a) Montrons que $w_k = w_{-k}$.

- c'est vérifié pour $k = 0$
- pour tout $k > 0$, on a $w_k = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}$ et

$$w_{-k} = \frac{1}{\lambda_{-1} \cdots \lambda_{-k}} = \lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}$$

par hypothèse de cette question.

b) Un calcul immédiat montre que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\|\epsilon(j)\| = 1$. De plus, pour $j \neq k, j \neq -j$, il est immédiat que $\langle \epsilon(j), \epsilon(k) \rangle = 0$, puisque ces deux vecteurs ont des supports disjoints. Enfin, par calcul, pour $j \neq 0$:

$$\langle \epsilon(j), \epsilon(-j) \rangle = \frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

cela montre que la famille $(\epsilon(j))_{j \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de E .

Si (e^j) est la famille orthonormée de $\ell^2(\mathbb{Z})$ définie dans la question III.2, soit T l'application définie sur $\text{Vect}(\epsilon(j))$ par $T(\epsilon(j)) = e^j$. Les deux familles étant orthonormées, T est une isométrie de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\epsilon(j))$ sur $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(e^j)$. Cette isométrie se prolonge en une isométrie de $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\epsilon(j))} = E$ sur $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{R}}(e^j)} = \ell^2(\mathbb{Z})$.

4. Soit $y = (y_k)_{-n \leq k \leq n}$ un élément de F .

- supposons $y \in E$, c'est-à-dire que $y_{-k} = \overline{y_k}$. On a alors :

$$\widehat{y}(t) = y_0 + 2 \sum_{k=1}^n \Re(y_k e^{ikt}) \in \mathbb{R}$$

- réciproquement, supposons $\widehat{y}(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$. Cela signifie que $\overline{\widehat{y}(t)} = \widehat{y}(t)$ ou

$$\sum_{k=-n}^n \overline{y_k} e^{-ikt} = \sum_{k=-n}^n y_k e^{ikt}$$

La famille $(e^{ikt})_{-n \leq k \leq n}$ étant libre, cela entraîne que pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $\overline{y_{-k}} = y_k$.

5. On sait que pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$S(x)_k = \lambda_{k-1} x_{k-1}, \text{ et } S^{-1}(x)_k = \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}$$

Ainsi, si $x \in E$:

$$\overline{S(x)_{-k}} = \lambda_{-k-1} \overline{x_{-k-1}} = \frac{1}{\lambda_k} \overline{x_{-k-1}} = \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}, \text{ et } S(x)_k = \lambda_{k-1} x_{k-1}$$

$$\overline{S^{-1}(x)_{-k}} = \frac{1}{\lambda_{-k}} \overline{x_{-k+1}} = \lambda_{k-1} x_{k-1}, \text{ et } S^{-1}(x)_k = \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}$$

ce qui entraîne que :

$$C(x)_k = \frac{1}{2} \left[\lambda_{k-1} x_{k-1} + \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\overline{S(x)_{-k}} + \overline{S^{-1}(x)_{-k}} \right]$$

et

$$D(x)_k = \frac{1}{2i} \left[\lambda_{k-1} x_{k-1} - \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1} \right] = -\frac{1}{2} \left[\overline{S(x)_{-k}} - \overline{S^{-1}(x)_{-k}} \right]$$

Donc $C(E) \subset E$ et $D(E) \subset E$.

b) Soit $W(y) \in P$ avec $y \in E$; alors $\overline{W(y)_{-k}} = \overline{w_k y_{-k}} = w_k y_k = W(y)_k$. Donc $P \subset E$.

De plus :

$$z_0 = w_0 y_0 = y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{y}(t) dt \geq 0, \text{ car } \widehat{y}(t) \geq 0$$

On sait que pour tout $y \in F$, $SW(y) = WS_1(y)$. On montre de la même façon que pour tout $y \in F$, $WS^{-1}(y) = WS_1^{-1}(y)$. On a alors :

$$(I - C)W(y) = [I - 1/2(S + S^{-1})]W(y) = W\left(y - \frac{1}{2}(S_1(y) + S_1^{-1}(y))\right) = W(u)$$

- on a évidemment $u \in F$, puisque $y \in F \Rightarrow S_1(y) \in F, S_1^{-1}(y) \in F$,
- pour tout t réel :

$$\widehat{u}(t) = \widehat{y}(t) - \frac{1}{2} \left(\widehat{S_1(y)}(t) + \widehat{S_1^{-1}(y)}(t) \right) = \widehat{y}(t) - \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\widehat{y}(t) = (1 - \cos t)\widehat{y}(t) \geq 0$$

Les démonstrations pour $I + C, I - D, I + D$ sont identiques. On obtient :

$$(I + C)W(y) = W(u), \widehat{u}(t) = (1 + \cos t)\widehat{y}(t)$$

$$(I - D)W(y) = W(u), \widehat{u}(t) = (1 - \sin t)\widehat{y}(t)$$

$$(I + D)W(y) = W(u), \widehat{u}(t) = (1 + \sin t)\widehat{y}(t)$$

c) L'ensemble P est un cône convexe. En effet, si $W(y) \in P$ et $a > 0$, alors $aW(y) = W(ay) \in P$ (car $a\widehat{y}(t) \geq 0$). Et si $W(y_1) \in P, W(y_2) \in P$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda W(y_1) + (1 - \lambda)W(y_2) = W(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in P$$

(car $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 = \lambda \widehat{y}_1 + (1 - \lambda)\widehat{y}_2$.)

Comme P ne semble pas fermé, regardons son adhérence $\overline{P}$. L'adhérence d'un convexe est convexe, l'adhérence d'un cône est un cône, donc $\overline{P}$ est un cône convexe fermé.

De plus $\overline{P} \neq \ell^2(\mathbb{Z})$, puisque si $z \in P$, alors $z_0 \geq 0$, et $\overline{P} \neq \{0\}$.

Regardons alors

$$A_{\overline{P}} = \{T \in L(\ell^2(\mathbb{Z})) ; \text{ il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \lambda x - T(x) \in P \text{ et } \lambda x + T(x) \in P \text{ pour tout } x \in P\}$$

Cette sous-algèbre contient C et D avec $\lambda = 1$. Par les résultats de la partie IV, A_P vérifie l'hypothèse (H) et il existe un sous-espace vectoriel fermé M de E (isométrique à $\ell^2(\mathbb{Z})$), non trivial de $\ell^2(\mathbb{Z})$ invariant par tous ses éléments, en particulier par C et D .

6. a) Soit $(u, v) \in E^2$ (donc $\overline{u_{-k}} = u_k$ et $\overline{v_{-k}} = v_k$). On a alors :

$$\begin{aligned} \|u + iv\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u + iv|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + i \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \overline{v_k} - v_k \overline{u_k} \right) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

b) Soit T l'application définie sur M^2 par

$$T(u, v) = u + iv$$

Par la question précédente, T est une isométrie de M^2 (muni de la topologie produit) sur J . Ainsi J est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, distinct de $\{0\}$ et $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ (puisque M le vérifie). Enfin :

$$S(J) = (C + iD)(J) \subset M + iM = J \text{ et } S^{-1}(J) = (C - iD)(J) \subset M + iM = J$$

Partie VI. Sous-espaces bi-invariants fonctionnels

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-n}^n \left| \frac{x_k}{w_k} \right| \leq \left(\sum_{k=-n}^n \left| \frac{1}{w_k} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-n}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

Ceci entraîne que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |w_k^{-1} x_k|$ converge.

2. L'ensemble M_{t_0} possède une structure de sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π périodiques. Il est fermé car si $(x^n) \in M_{t_0}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = x$, alors $x \in \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ entraîne que $\Omega(x)(t)$ existe pour tout t réel. De plus :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\Omega(x^n)(t) - \Omega(x)(t)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |w_k^{-1} |x_k^n - x_k| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{w_k} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k^n - x_k|^2 \right)^{1/2}$$

La suite de fonctions $\Omega(x^n)$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\Omega(x)$ et donc $\Omega(x)(t_0) = 0$.

Enfin $M_{t_0} \neq \{0\}$ car $e^0 - w_1 e^{-it_0} e^1 \in M_{t_0}$ et $M_{t_0} \neq \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ car $e^0 \notin M_{t_0}$.

3. Soit $x \in M_{t_0}$ donc tel que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^{-1} x_k e^{ikt_0} = 0$. Alors

$$\Omega(S(x))(t_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^{-1} \lambda_{k-1} x_{k-1} e^{ikt_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{k-1}^{-1} x_{k-1} e^{ikt_0} = e^{it_0} \Omega(x)(t_0) = 0$$

et

$$\Omega(S^{-1}(x))(t_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^{-1} \lambda_k^{-1} x_{k+1} e^{ikt_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{k+1}^{-1} x_{k+1} e^{ikt_0} = e^{-it_0} \Omega(x)(t_0) = 0$$

4. Supposons qu'il existe $X \subset \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ de dimension finie invariant par S . Alors S possède au moins une valeur propre μ et un vecteur propre associé $x \in X$,

$$S(x) = \mu x \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{k-1} x_{k-1} e^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu x_k e^k$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mu x_{k+1} = \lambda_k x_k$. Ainsi

$$\mu = \dots = \frac{\lambda_n x_n}{x_{n+1}} = \dots = \frac{\lambda_1 x_1}{x_2} = \frac{\lambda_0 x_0}{x_1} = \frac{\lambda_{-1} x_{-1}}{x_0} = \dots = \frac{\lambda_{-n} x_{-n}}{x_{-n+1}} = \dots$$

On peut supposer que $x_0 = 1$. Cela donne :

$$\forall n, x_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{\mu^n}$$

et par la question 1, la série $\sum \left| \frac{1}{\mu^n} \right|$ converge, donc $|\mu| > 1$.

Mais

$$\forall n, x_{-n} = w_{-n} \mu^n$$

et par la question 1, la série $\sum |\mu^n|$ converge, donc $|\mu| < 1$. Contradiction. Ainsi S n'admet pas de sous-espace invariant de dimension finie hormis $\{0\}$.