(version mercredi 14 mars 2001 : 13h37)

Concours interne de recrutement de professeurs agrégés

Section mathématiques, deuxième épreuve de mathématiques, durée 6 heures, 14–16 février 2001

Calculatrice de poche y compris programmable, alphanumérique ou écran graphique à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire numéro 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

L'énoncé original comprend 7 pages, ce qui ne sera peut être pas respecté par la frappe de l'énoncé en TEX.

Soit Ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Étant donné une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ de classe C^∞ on note $z(f) = \{x \in \Omega | \forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(x) = 0\}$

L'objet du problème est l'étude de quelques conditions suffisantes sur f pour que l'implication suivante soit vraie: $z(f) \neq \emptyset \Longrightarrow f = 0$

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ on appelle support de f l'adhérence du complémentaire de $z(f)$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire l'ensemble $\overline{\mathbb{R} - z(f)}$.

La partie (II) étudie le cas des fonctions analytiques d'une variable réelle et les parties (III) et (IV) étendent ce résultat à des fonctions plus générales (classes quasi-analytiques).

La première partie est l'étude des propriétés de suites réelles logarithmiquement convexes utiles pour la suite du problème.

Les résultats d'une question non démontrée peuvent être utilisés dans les questions ultérieures.

Partie I

On note E l'ens emble de toutes les suites réelles $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ A_n \geq 1, \ A_0 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ (A_n)^2 \leq A_{n+1} A_{n-1}$$

1) Trouver toutes les suites constantes contenues dans E. Vérifier que la suite de terme général $A_n = n!$ est élément de E.

---

2) Soit $A \in E$. On définit les suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ puis $\lambda_n = \frac{A_{n-1}}{A_n}$ et $\mu_n = \frac{1}{(A_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

(a) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a $(\lambda_n)^n \leq \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$.

(b) Montrer que la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall j \in [0, n] \cap \mathbb{N} \ : \frac{A_{n+1}}{A_{n+1-j}} \geq \frac{A_n}{A_{n+1-j}}$.

En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall j \in [0, n] \cap \mathbb{N} \ : \ A_n A_{n-j} \leq A_n$.

(d) Établir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité $\lambda_n \leq \mu_n$. En déduire que si la série de terme général (μ_n) est convergente, alors la série de terme général (λ_n) est convergente.

---

3) On donne deux suites réelles à termes tous strictement positifs notées (a_n) et (c_n) avec $n > 0$. On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

(a) On pose $u_n = (a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$ et $b_n = (c_1 c_2 ... c_n)^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $u_n \leq \frac{b_n}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k c_k$.

Indication : on pourra utiliser les inégalités entre les moyennes arithmétique et géométrique $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$ valable si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des réels strictement positifs.

(b) On suppose de plus que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{b_k}{k}$ est convergente et on note $B_k \sum\limits_{p=k}^{+\infty} \frac{b_p}{p}$.

Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p \leq \sum\limits_{k=1}^{n} B_k c_k a_k$.

(c) On choisit maintenant $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.

En déduire que la série de terme général un est convergente et que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

---

4) On reprend les notations de la question (2). Établir, en utilisant ce qui précède, que si la série de terme général (λ_n) est convergente, alors la série de terme général (μ_n) est convergente.

Partie II

Fonctions analytiques d'une variable réelle.

Soit Ω un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs réelles ou complexes ($f : \Omega \to \mathbb{K}$).

On dira que f est analystique dans Ω si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω. Cela signifie que pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un réel strictement positif r_0 dépendant de x_0 et vérifiant $]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\subset \Omega$, ainsi qu'une suite de nombres réels ou complexes notée (a_n), dépendant aussi de x_0 et telle que

$$\forall x \in]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

On admettra sans démonstration que toute fonction analytique dans Ω est de classe C^∞ dans Ω.

1) Soit f une fonction analytique dans Ω.

(a) Montrer que $z(f)$ est une partie ouverte.
(La définition de $z(f)$ est donnée dans le préambule)

(b) Montrer que $z(f)$ est une partie fermée dans Ω.

(c) On suppose que $z(f) \neq \emptyset$. Monrer alors que f est nulle dans Ω.

---

2) Soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N} \ : \ |f^{(n)}(x)| \leq M K^n n!$$

Montrer en utilisant une formule de TAYLOR, que f est analytique dans Ω.

Partie III

Classes quasi-analytiques.

Soit $A \in E$ de terme général A_n, donnée dans toute la suite du problème.

On note $C(A)$ l'ensemble de toutes les fonctions f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles qu'il existe deux constantes positives α et β pour lesquelles $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ |f^{(n)}(x)| \leq \alpha \beta^n A_n$

Les constantes α et β dépendent de f.

On dira que $C(A)$ est une classe quasi-analytique si de plus on a $\forall f_i n C(A) \ : \ z(f) \neq \emptyset \Longrightarrow f = 0$

1) On suppsose, dans cette questions seulement, que $A_n = n!$; vérifier alors que $C(A)$ est une classe quasi-analytique.

---

2) Soient f et g deux éléments de $C(A)$; Montrer en utilisant les résultats de la partie I que $f + g$ et fg sont aussi des éléments de $C(A)$.

---

3) Soit $f \in C(A)$. On donne deux constantes réelles quelconques a et b. Soit la fonction g définie par la formule $g(x) = f(ax + b)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $g \in C(A)$.

---

4) On suppose dans cette question que $C(A)$ est une classe quasi-analytique. Montrer que toute fonction à support compact qui est élément de $C(A)$ est nécéssairement nulle.

---

5) On suppose maintenant que $C(A)$ **n'est pas** une classe quasi-analytique.

(a) Montrer qu'il existe $f \in C(A)$ et $a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$ tels que $f(a) \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ : f^{(n)}(0) = 0$

(b) Montrer que dans le résultat précédent on peut choisir f tel que $a > 0$.

(c) À partir de la fonction f trouvée ci dessus et choisie avec $a > 0$ on construit successivement les deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par les formules $f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $h(x) = g(x)g(2a - x)$; Montrer que $h \in C(A)$. Que peut-on dire du support de h ?

(d) À l'aide de ce qui précède, énoncer une condition nécéssaire et suffisante simple pour que $C(A)$ **ne soit pas une classe quasi-analytique.**

Partie IV

Théorème de de DENJOY-CARLEMAN.

Dans toute cette partie $A \in E$ est donnée. On suppose de plus que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A_{n+1}}{A_n} = +\infty$.

Les suites (λ_n) et (μ_n) sont toujours définies par $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ puis $\lambda_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}$ et $\mu_n = \frac{1}{(A_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction Q de la variable réelle x définie par $Q(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{A_n}$.

1) Montrer que cette série entière admet un rayon de convergence infini.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $q(x) = sup\{\frac{x^n}{A_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que x est une fonction définie et monotone croissante sur $[0, +\infty[$. Montrer de plus que $\forall x \in]0, +\infty[\ :\ 1 \leq q(x) \leq Q(x)$.

3) Montrer que
(i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in N\ :\ 0 \leq x < y \Longrightarrow \frac{y^n}{A_n} - \frac{x^n}{A_n} \leq (y - x)Q'(y)$.
(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, :\ 0 \leq x < y \Longrightarrow 0 \leq q(y) - q(x) \leq (y - x)Q'(y)$
et en déduire que la fonction q est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction Q' représente la dérivée de Q.

Dans toute la suite du problème on considère les cinq propositions suivantes :
(1) : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln Q(x)}{1+x^2} dx$ est une intégrale convergente
(2) : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{1+x^2} dx$ est une intégrale convergente
(3) : La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu_n$ est convergente
(4) : La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ est convergente
(5) : $C(A)$ n'est pas une classe quasi-analytique

4) Montrer que : (1) $\Longrightarrow$ (2).

5) On suppose que la propriété (2) ci dessus est vraie. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ :\ x \geq \frac{e}{\mu_n} \Longrightarrow \ln(q(x)) \geq n$.

En remarquant que $\int_{\frac{e}{\mu_1}}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_{\frac{e}{\mu_n}}^{\frac{e}{\mu_{n+1}}} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx + \int_{\frac{e}{\mu_{N+1}}}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx$

montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_k \leq e \int_{\frac{e}{\mu_1}}^{+\infty} \frac{\ln q(x)}{x^2} dx$

En déduire que la propriété (3) est vraie.

6) Que sait-on de l'implication (3) $\Longrightarrow$ (4) ?

7) Dans cette question on se propose de montrer que : (4) $\Longrightarrow$ (5).
On suppose que la propriété (4) est vraie.

(a) Exhiber un exemple de fonction définie dans $\mathbb{R}$, continue, positive, non nulle, à support compact inclus dans $[-1, 1]$. Cette fonction sera notée g_0.

(b) La fonction g_0 étant celle de la question précédente on définit par récurrence la suite de fonctions g_n par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ g_n(x) = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x-\lambda_n}^{x+\lambda_n} g_{n-1}(t)dt = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{+\lambda_n} g_{n-1}(t+x)dt$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

- g_n est de classe C^n dans $\mathbb{R}$
- g_n est à support inclus dans $[-\alpha_n, \alpha_n]$ où $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$.

(c) On notera $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i$.

(i) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{-\alpha_n}^{+\alpha_n} g_n(x)dx = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{+\lambda_n} \Big(\int_{-\alpha_n+t}^{+\alpha_n+t} g_{n-1}(u)du \Big) dt = \int_{-\alpha_{n-1}}^{+\alpha_{n-1}} g_{n-1}(x)dx$$

(ii) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\int_{-\alpha}^{+\alpha} g_n(x)dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} g_0(x)dx = \int_{-1}^{+1} g_0(x)dx$

(d) Dans toute la suite on notera N_∞ la norme de la convergence uniforme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur $\mathbb{R}$; c'est à dire que $N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. On notera $N_\infty(g_0) = M$.

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ N_\infty(g_n) \leq MA_0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ N_\infty(g'_n) \leq MA_1$$

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ on a $N_\infty(g_n - g_{n-1}) \leq MA_1\lambda_n$.
En déduire que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à support compact.

(f) Étude des propriétés de g.

(i) Montrer que g n'est pas nulle.

(ii) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $N_\infty(g_k^{(k)}) \leq MA_k$.

(iii) En déduire que $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \ k \leq n \ : \ N_\infty(g_n^{(k)}) \leq MA_k$
On pourra faire une récurrence sur n.

(iv) Montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ la suite $\big(g_n^{(k)}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
On pourra s'inspirer des méthodes des questions précédentes.
En déduire alors que g est C^∞ dans $\mathbb{R}$.

(v) Montrer enfin que $g \in C(A)$.

(g) Conclure.

Remarque : On peut démontrer (mais cela dépasse le cadre de ce problème) que (5) $\Longrightarrow$ (1) ; l'équivalence des 5 proriétés énoncées ci-dessus constitue le théorème de DENJOY-CARLEMAN.

FIN

Agreg Interne 2 2001

(Arnaud DENJOY né 5 Jan 1884 in Auch, Gers, France décédé 21 Jan 1974 in Paris, France ; son portrait est sur le site *http : //www−history.mcs.st−and.ac.uk/ history/Mathematicians/Denjoy.html* ; CARLEMAN Tage Gillis Torsten Wisseltofta 1892 - Djursgolm (près de Stockholm) 1949 ; malgré mes recherches son portrait m'est inconnu)