

EX1. a) Comparez deux nombres de Fermat consécutifs

(montrer que $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$)

b) Démontrez le Lemme : $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$

c) En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

EX2 . a) Montrer que si a s'écrit sous la forme $2^{k-1}(2^k-1)$ avec 2^k-1 premier alors a est parfait. (*Euclide, il y a 2300 ans*)

b) Etablir la réciproque : tout nombre parfait pair est de la forme $2^{k-1}(2^k-1)$ avec 2^k-1 premier. (*Euler en 1749*)

c) En déduire comment obtenir tous les nombres parfaits pairs.

EX3 Soit p un entier naturel premier. On note E_p l'ensemble $\{1 ; 2 ; \dots ; p-1\}$.

a) : Montrez que tout élément de E_p est premier avec p .

b) : Montrez que pour tout a de E_p , il existe b unique dans E_p tel que $ab \equiv 1 [p]$.

c) : Déterminez les éléments a de E_p tels que $a^2 \equiv 1 [p]$.

d) : Montrez que $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1) \equiv (p-1) [p]$

e) : En déduire que pour tout entier naturel p premier, $(p-1)! + 1$ est divisible par p .

(Ce résultat ainsi que sa réciproque est le théorème de Wilson)

EX4 Montrer que p impair est un nombre premier si et seulement si , le plus petit entier dont le carré ajouté à p donne un carré parfait est

$$\frac{p-1}{2} .$$

En déduire un critère pour reconnaître si un nombre impair, non carré, est premier.

EX5 a) Soit n un entier naturel. Montrer que $30 \mid n^5 - n$

b) Un entier naturel ne contient que les facteurs premiers 5 et 7. Le nombre des diviseurs (positifs) de n^2 est le triple de celui de n . Trouver n .

Etude sur les nombres de Fermat.

Utilisation d'une récurrence au b) et de la détermination d'un PGCD par recherche d'un reste non nul dans des divisions successives. Propriété de 2 nombres de Fermat distincts.

Notions de nombre parfait. Liens avec les nombres de Mersenne.

.Démonstration détaillée du théorème de Wilson (sens direct) par approches successives.

.Utilisation du théorème de Bézout au b).

Exercice d'arithmétique sur les carrés parfaits conduisant à un autre critère de primalité.

Deux questions indépendantes.

a) On décompose 30 et on étudie les différents cas. Utilisation du théorème de Fermat pour les 2 derniers cas.

b) Exercice sur la notion de nombre de diviseurs d'un entier. Application de la décomposition en produit de facteurs premiers.