FORMULAIRE

Index

DERIVEES des FONCTIONS USUELLES

Fonctions	Dérivées	Ensemble de définition
$x^n \quad x \in \mathbb{Z}$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x \quad x \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln(a)\,a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a\|x\| \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\text{cotan}\,x$	$-1-\text{cotan}^2\,x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\text{Arcsin}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,+1[$
$\text{Arccos}\,x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,+1[$
$\text{Arctan}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}\,x$	$\text{ch}\,x$	$\mathbb{R}$
$\text{ch}\,x$	$\text{sh}\,x$	$\mathbb{R}$
$\text{th}\,x$	$1-\text{th}^2\,x = \frac{1}{\text{ch}^2\,x}$	$\mathbb{R}$
$\text{coth}\,x$	$1-\text{coth}^2\,x$	$\mathbb{R}^*$
$\text{Argsh}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\text{Argch}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$
$\text{Argth}\,x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1,+1[$

Règles de dérivation :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \left(f^n\right)' = n\,f^{n-1}f'$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f' \qquad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Dérivées n-ièmes :

.Formule de Leibniz : $\left(fg\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ f^{(k)} g^{(n-k)}$

$\left(x^m\right)^{(n)} = m\,(m-1)...(m-n+1)\ x^{m-n}$

$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \left(\ln(a)\right)^n$

$\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{\left(1-x\right)^{n+1}}$

Développements en série entière de fonctions usuelles

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ...$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ...$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ...$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + ... + \frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$$

FORMULES de TAYLOR

Taylor avec reste intégral:

f fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Taylor-Lagrange:

f de classe C^n $sur\ [a,b]\ (a<b)\ et\ D^{n+1}\ sur\ ]a,b[;\ alors\ il\ existe\ c \in]a,b[\ tel\ que$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

ou encore :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Taylor-Young: f de $I \subset \mathbb{R}$ dans E, n fois dérivable en a, alors pour tout h tel que $a+h \in I$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k\ f^{(h)}(a)}{k!} + o(h^n)$$

Corollaire: application aux développements limités:

Si f: $I \rightarrow E$ est n fois dérivable en 0, alors f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k\ f^{(k)}(0)}{k!} + o(x^{(n)})$$

Inégalité de Taylor – Lagrange :

$f\ de\ classe\ C^n\ sur\ [a,b]\ (a<b), et\ D^{n+1}\ sur]a,b[,$

$alors\ si\ f\ est\ bornée\ sur\ ]a,b[$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

LIMITES et EQUIVALENTS

$\sin x \sim x$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\tan x \sim x$ $\quad \operatorname{Arcsin} x \sim x$

$\operatorname{Arctan} x \sim x$ $\quad \operatorname{Arc}\cos(1-x) \sim \sqrt{2x} \;\; si \;\; x \geq 0$

$\operatorname{sh} x \sim x$ $\quad \operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

$\operatorname{th} x \sim x$ $\quad \operatorname{Argsh} x \sim x$

$\operatorname{Argth} x \sim x$ $\quad \operatorname{Argch}(1+x) \sim \sqrt{2x} \;\; si \;\; x \geq 0$

$\ln(1+x) \sim x$ $\quad e^x - 1 \sim x$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{\ln x}{x}) = 0+$$

$$\lim_{x\to\infty}(x.\ln x) = 0-$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^n}{e^x}) = 0+$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad a>1, \alpha>0$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x |x|^\alpha = 0 \qquad a>1$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x x^\alpha = 0 \qquad 0<a<1, \;\; \alpha>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(a^x |x|^\alpha) = 0 \quad a>1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0+}(x^\alpha \log_a x) = 0 \quad \alpha>0$$

$$\lim_{x\to 0+}(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 0-}(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})) = \frac{\pi}{2}$$

NOMBRES COMPLEXES

$\mathbb{C}$ est le corps des complexes

$z \in \mathbb{C} : z = a + ib; \quad conjugué\ de\ z = \bar{z} = a - ib; \quad i^2 = -1$

$z + z' = a + a' + i(b + b') \qquad z\, z' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

$si\ z' \neq 0;\ \dfrac{z}{z'} = \dfrac{aa' + bb' + i(a'b - ab')}{a'^2 + b'^2}$

$\mathrm{Re}(z) = a;\ \mathrm{Im}(z) = b;\ \mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z);\ \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$

$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z).\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z).\mathrm{Im}(z');\ \ \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z).\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z').\mathrm{Im}(z)$

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z);\ \ z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z);\ z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

$Module : |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|;\ \ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|;\ \ |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

$|zz'| = |z|.|z'|;\ \ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$Inégalité\ triangulaire : |z + z'| \leq |z| + |z'|$

$Complexe\ de\ module\, 1 : z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$|z| = 1,\ alors \dfrac{1}{z} = \bar{z}$

$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta);\ \theta = argument\ de\ z = \mathrm{Arg}(z)$

$\mathrm{Arg}(zz') \equiv \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')\ \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z);\ \mathrm{Arg}\left(\bar{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z);\ \ \mathrm{Arg}(-z) = \pi + \mathrm{Arg}(z)$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ \ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ \theta = \pm\,\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

$\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

$z = a + ib\ est\ l'affixe\ de\ M \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.\ ;\ affixe\ de\ \overrightarrow{M_1M_2} = z_2 - z_1$

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) = \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right)$

$Formule\ de\ Moivre : (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$\left(\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Fonction complexe :

$$z \in \mathbb{C}; \text{on définit } e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$z = x + iy,\ e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos iz = \text{ch}\, z\ ; \quad \sin iz = i\ \text{sh}\, z\ ; \quad \tan iz = i\ \text{th}\, z$$

$$\text{ch}\, iz = \cos z\ ; \quad \text{sh}\, iz = i \sin z\ ; \quad \text{th}\, iz = i \tan z$$

$$\cos(x+iy) = \cos x\ \text{ch}\, y - i \sin x\ \text{sh}\, y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x\ \text{ch}\, y + i\ cox\ \text{sh}\, y$$

Transformation du plan :

- Similitudes directes : s(z) = z'= az + b
  . si a = 1 : translation d'affixe b
  . si a ≠ 1 : il existe un point M_0 unique invariant ; s est composée commutative
  de la rotation de centre M_0 et d'angle Arg(a) et de l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$
- Similitudes indirectes :
  $s(z) = a\bar{z} + b$
  . si $|a|=1$: s est un antidéplacement (c'est un réflexion si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$)
  . si $|a| \neq 1$: s possède un point invariant M_0 unique. S est la composée commutative d'une réflexion d'axe d passant par M_0 et de l'homothétie de centre M_0 et de rapport $|a|$.

QUELQUES NOTIONS de TOPOLOGIE d'un espace vectoriel normé

Ouvert : voisinage pour chacun de ses points
Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert
Une intersection quelconque de fermés est un fermé
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert
Une réunion finie de fermés est un fermé

f est continue de E vers F si et seulement si :
l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E
ou l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E

f est k lipschitzienne :
$\forall (x,y) \in E^2 \;\; \| f(x) - f(y) \| \leq k\, N(x-y)$
f uniformément continue sur A partie de E si :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \; tel \; que \; \forall (x,y) \in A^2 \;\; N(x-y) \leq \eta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon$

Une application k lipschitzienne est uniformément continue.
Une application uniformément continue est continue.

Application linéaire continue :
Si f est linéaire de E normé dans F normé, les 4 propositions sont équivalentes :

- f est continue sur E
- f est continue en 0
- f est bornée sur $B\,(O_E,1)$
- f est k-lipschitzienne (et donc uniformément continue)

Suite de Cauchy : (un) suite de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \;\; (p \geq N \; et \; q \geq N) \Rightarrow N(u_p - u_q) < \varepsilon$
Une suite de Cauchy est bornée
Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.
Toute suite convergente est de Cauchy

E est complet si toute suite de Cauchy converge.
$\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont complets*
Toute partie fermée d'un complet est complète

Compact : une partie A d'un espace vectoriel normé E est compact si toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence.
Tout compact est complet

Tout fermé inclus dans un compact est compact
Les compacts sont des fermés bornés.

Théorème de Heine : toute application continue sur A partie compact à valeurs dans un espace vectoriel normé est uniformément continue sur A.

L'image d'une partie compacte incluse dans A compact par une application continue est compacte
Toute application continue sur un compact est bornée et la borne sup de sa norme est atteinte.

ESPACE VECTORIEL de DIMENSION FINIE :
. Toute application linéaire est continue
. Tout espace vectoriel de dimension finie est de Banach (complet)
. Les parties compactes sont les fermés bornés.
. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.
. Deux normes sont toujours équivalentes

ESPACES METRIQUES :
Un espace métrique est connexe si et seulement si les parties à la fois ouvertes et fermées dans E sont E et $\emptyset$.

E est connexe si et seulement si il n'existe pas deux ouverts disjoints U et V tels que leur réunion soit égale à E.

L'image par une application continue d'un connexe est un connexe.

Une partie connexe par arcs est connexe
Une partie convexe est connexe par arcs.
Une partie étoilée est connexe par arcs.

Théorème des valeurs intermédiaires :
Si une fonction f à valeurs réelles est continue sur un connexe C . Si $a=f(x)$ et $b = f(y)$ avec x et y appartenant à C, alors pour tout c de $[a,b]$, il existe z dans C tel que $f(z)=c$.

PRIMITIVES de FONCTIONS USUELLES

Fonctions	Primitives	Ensemble de définition
$x^n \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{coth} x$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan}(e^x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2} \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Argth} \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2 - x^2} \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{Argth} \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert \end{cases}$	$]-a, a[$ $\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{a}$	$]-a, a[$

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|$	$\mathbb{R} \setminus [-a, a]$

PRODUIT SCALAIRE, NORME, PRODUIT VECTORIEL, PRODUIT MIXTE

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y)\in E^2 \ \ |\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

- Inégalité deMinkowski :

$$\forall (x,y)\in E^2 \ \ \sqrt{\langle x+y,x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}+\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

- Relations entre norme et produit scalaire (dans R):

$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$; $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$

$\|x-y\|^2=\lfloor x \rfloor^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle$

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ (*identité du parallélogrammme*)

$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle$

$2\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$ (*identité de polarisation*)

- Théorème de Pythagore :

Si $x_1, x_2, \ldots x_n$ *est une famille orthogonale, alors* :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

- Produits mixtes, produits vectoriels :

Produit mixte: $[x,y,z] = [y,z,x]=[z,x,y]=\langle x \wedge y,z\rangle=\langle y \wedge z,x\rangle=\langle z \wedge x,y\rangle$

$x \wedge y = -y \wedge x$ si x colinéaire à y: $x \wedge y = \vec{0}$

(x,y) *libre* $\Leftrightarrow (x,y,x\wedge y)$ *est une base directe*

$\|x\wedge y\|^2=\|x\|^2\,\|y\|^2-\langle x,y\rangle^2$ (*identité de Lagrange*)

$x\wedge(y\wedge z)=\langle x,z\rangle y-\langle x,y\rangle z$

$x\wedge(y\wedge z)+y\wedge(z\wedge x)+z\wedge(x\wedge y)=0$

$\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$ $\|x\wedge y\|=\|x\|\,\|y\|\sin\theta$ ($\theta\in[0,\pi]$, *écart angulaire de x et y*)

TRIGONOMETRIE

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin a\cos a$

$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

$\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b]$

$\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$\cos p+\cos q=2\cos(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\cos p-\cos q=-2\sin(\dfrac{p+q}{2})\sin(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p+\sin q=2\sin(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p-\sin q=2\sin(\dfrac{p-q}{2})\cos(\dfrac{p+q}{2})$

$\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

$\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos 2a=\dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

$\sin 2a=\dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos} = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{-ix} + e^{ix}} = i \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}}$$

$$\cot anx = \frac{\cos x}{\sin x} = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot an^2 x}$$

$$e^{ix} + e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \cos(\frac{x-y}{2}) \qquad e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{i\frac{x+y}{2}} \sin(\frac{x-y}{2})$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta}$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta = e^{-in\theta}$$

$$\arcsin \theta + \arccos \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan \theta + \arctan \frac{1}{\theta} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \quad \varepsilon = 1 \; si \; x > 0; -1 \; si \; x < 0$$

angle	sin	cos	tan	cotan
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE

$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b.\mathrm{ch}\, a \qquad \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, b.\mathrm{ch}\, a$

$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b \qquad \mathrm{ch}(a-) = \mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1+\mathrm{th}\, a.\mathrm{th}\, b} \qquad \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1-\mathrm{th}\, a.\mathrm{th}\, b}$$

$$\mathrm{sh}\, a.\mathrm{sh}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)]$$

$$\mathrm{ch}\, a.\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)]$$

$$\mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(a+b) + s\,\mathrm{sh}(a-b)]$$

$$\mathrm{sh}\, p + \mathrm{sh}\, q = 2\,\mathrm{sh}(\frac{p+q}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2}) \qquad \mathrm{sh}\, p - \mathrm{sh}\, q = 2\,\mathrm{sh}(\frac{p-q}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{p+q}{2})$$

$$\mathrm{ch}\, p + \mathrm{ch}\, q = 2\,\mathrm{sh}(\frac{p+q}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2}) \qquad \mathrm{ch}\, p - \mathrm{ch}\, q = 2\,\mathrm{sh}(\frac{p-q}{2})\,\mathrm{sh}(\frac{p-q}{2})$$

$$\mathrm{th}\, p + \mathrm{th}\, q = \frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch}\, p.\mathrm{ch}\, q} \qquad \mathrm{th}\, p - \mathrm{th}\, q = \frac{\mathrm{sh}(p-q)}{\mathrm{ch}\, p.\mathrm{ch}\, q}$$

$$\mathrm{sh}\, 2a = 2\,\mathrm{sh}\, a.\mathrm{ch}\, a = \frac{2\,\mathrm{th}\, a}{1-\mathrm{th}^2\, a}$$

$$\mathrm{ch}\, 2a = \mathrm{ch}^2\, a + \mathrm{sh}^2\, a = 2\,\mathrm{ch}^2 - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\, a = \frac{1+\mathrm{th}^2\, a}{1-\mathrm{th}^2\, a}$$

$$\mathrm{th}\, 2a = \frac{2\,\mathrm{th}\, a}{1+\mathrm{th}^2\, a}$$

$$\mathrm{sh}^2\, a = \frac{\mathrm{ch}\, 2a - 1}{2} \qquad \mathrm{ch}^2\, a = \frac{\mathrm{ch}\, 2a + 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\, a = \frac{\mathrm{sh}\, 2a}{\mathrm{ch}\, 2a + 1} = \frac{\mathrm{ch}\, 2a - 1}{\mathrm{sh}\, 2a} \qquad pour\ a \neq 0$$

$$(\mathrm{ch}\, a + \mathrm{sh}\, a)^n = \mathrm{sh}\, na + \mathrm{ch}\, na \qquad (\mathrm{ch}\, a - \mathrm{sh}\, a)^n = \mathrm{ch}\, na - \mathrm{sh}\, na$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad \operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$