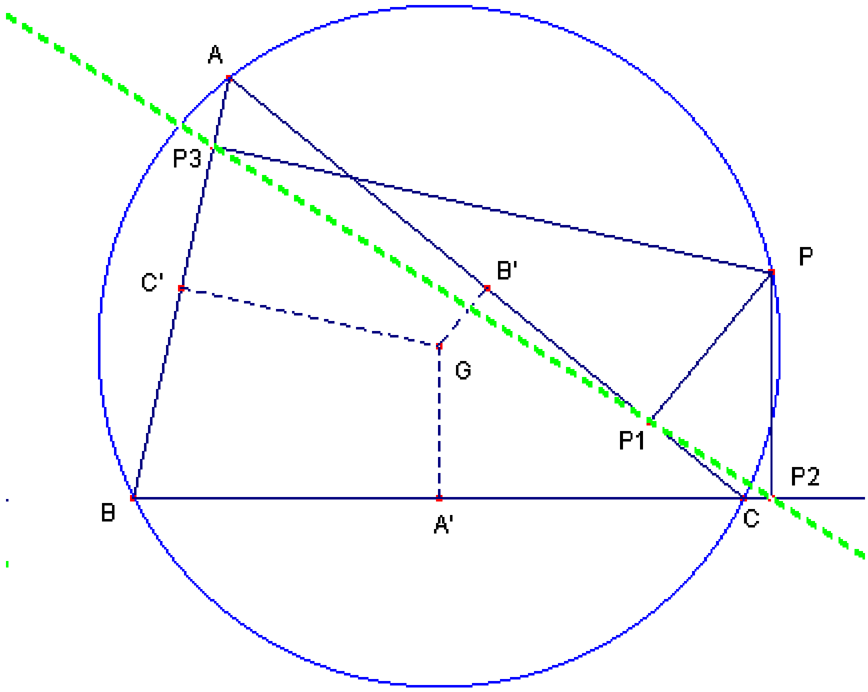
EX 1 : Dans un triangle, les trois projetés orthogonaux d'un point quelconque du plan sur les côtés du triangle sont alignés si et seulement si le point projeté est sur le cercle circonscrit au triangle.



On note A ,B,C le triangle de départ. P est le point que l'on projette sur les trois droites (AB) ;(AC) ;(BC) . P1,P2,P3 sont les projetés. O est l'orthocentre .

- P_1, P, P_3, A sont cocycliques car AP_3P et AP_1P sont rectangles de même hypoténuse [AP].

Donc : $(P_1P, P_1P_3) = (AP_3,AP)$ modulo Π = (AB,AP) modulo Π

- De même P_1, P, P_2, C sont cocycliques

Donc $(P_1P, P_1P_2) = (P_1P_2, P_1P)$ modulo Π = (CP, CB) modulo Π

Par la relation de Chasles, $(P_1P_2, P_1P_3) = (P_1P_2, P_1P) + (P_1P, P_1P_3)$

= (AB, AP) + (CP, CB) modulo Π

P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si (AB, AP) = (CB, CP) modulo Π

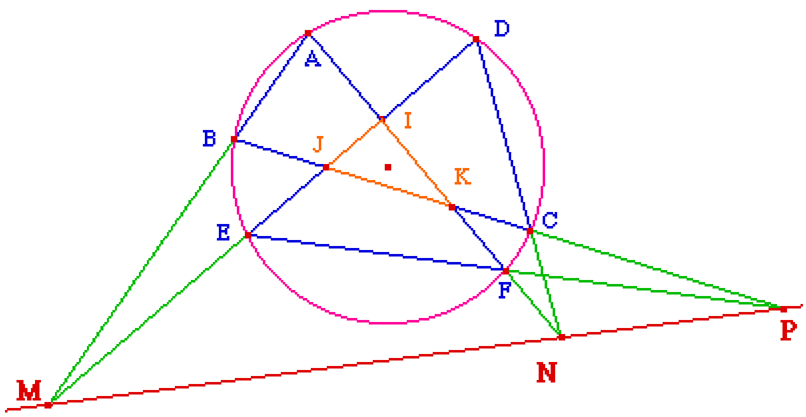
Donc P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si A,B,C, P sont cocycliques ou alignés.

EX2 : ABEFCD est un hexagone inscrit dans un cercle. Montrer que les points M, N et P (intersections des diagonales et des côtés opposés) sont alignés (théorème de Pascal)

Cette preuve par la puissance d'un point par rapport à un cercle suppose que le triangle IJK existe, c'est-à- dire que deux côtés de l'hexagone ne sont jamais parallèles (pour que à la fois M, N, P, et I, J, K existent). On peut le rajouter dans les hypothèses, ou étendre la preuve aux cas particuliers.

On va appliquer 3 fois le théorème de Ménélaüs dans le triangle IJK, puis en faisant les produits membre à membre, on aura 9 fractions dont le produit sera égal à 1. En regroupant les produits utilisant I, puis J, puis K et les points de l'hexagone, un regroupement de 6 termes va être égal à 1 par la puissance de ces point par rapport au cercle. Reste un produit de 3 autres termes égal à 1. Par la réciproque de Ménélaüs, cela signifiera que les points M, N, et P sont alignés.

Détail de la démonstration



1. Puissances par rapport au cercle

1.a. de I : $\overline{IA}.\overline{IF} = \overline{IE}.\overline{ID}$

1.b. de J : $\overline{JD}.\overline{JE} = \overline{JC}.\overline{JB}$

1.c. de K : $\overline{KA}.\overline{KF} = \overline{KB}.\overline{KC}$

2. Ménélaüs dans le triangle IJK

M, A, B alignés : $$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}}.\frac{\overline{BJ}}{\overline{BK}}.\frac{\overline{AK}}{\overline{AI}} = 1$$

N, D, C alignés : $$\frac{\overline{NK}}{\overline{NI}}.\frac{\overline{DI}}{\overline{DJ}}.\frac{\overline{CJ}}{\overline{CK}} = 1$$

P, E, F alignés : $$\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}}.\frac{\overline{FK}}{\overline{FI}}.\frac{\overline{EI}}{\overline{EJ}} = 1$$

3. Par produit on a donc, en regroupant les termes :

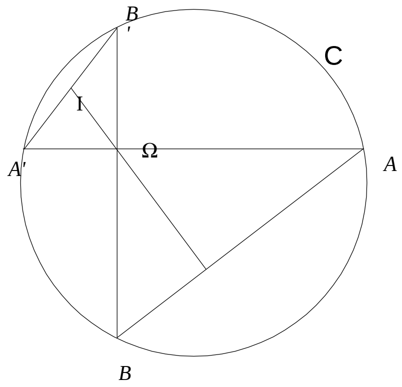
$$\left(\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}}.\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}}.\frac{\overline{NK}}{\overline{NI}}\right)\left(\frac{\overline{DI}.\overline{EI}}{\overline{FI}.\overline{AI}}\right)\left(\frac{\overline{BJ}.\overline{CJ}}{\overline{DJ}.\overline{EJ}}\right)\left(\frac{\overline{AK}.\overline{FK}}{\overline{BK}.\overline{PK}}\right) = 1$$

Or la deuxième parenthèse est égale à 1 par la relation 1.a, la suivante aussi par 1.b ainsi que la dernière par 1.c. Il reste donc : $\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}}.\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}}.\frac{\overline{NK}}{\overline{NI}} = 1$ **, soit par la réciproque de Ménélaüs dans IJK, que les points M, N, et P sont alignés.**

EX3 :

D'un point Ω intérieur à un cercle* C *de rayon R, on mène deux droites perpendiculaires qui rencontrent le cercle* C *en A et A' d'une part et en B et B' d'autre part. On note I le milieu du segment [A'B'].

Il s'agit de montrer que la médiane issue de Ω dans le triangle ΩA'B' est hauteur du triangle ΩAB.



Puissances par rapport au cercle :

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega B'}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B'})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B'} + \overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega B'})$$

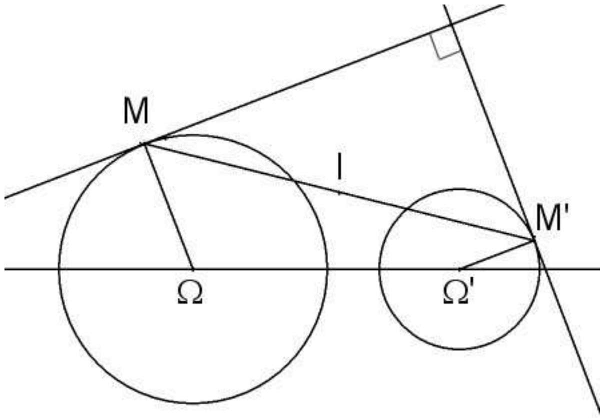
$$= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega B'}) + (\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B'}) + (\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega A'})]$$

$$= 0$$

Donc (AB) et (ΩI) sont orthogonales

Donc la médiane issue de Ω dans le triangle Ω*A'B'* est hauteur du triangle Ω*AB*.

EX4 : Soient 2 cercles C et C'. On place un point M sur C et un point M' sur C' tels que les tangentes T en M à C et T' en M' à C' soient orthogonales.
Décrire le lieu des points I, milieux de [MM'].



Placer le repère pour avoir Ω (-ω , 0) et Ω' (ω , 0) . Alors, M $\left|\begin{array}{l} R\cos\theta-\omega \\ R\sin\theta \end{array}\right.$ et M' $\left|\begin{array}{l} R'\cos\theta'+\omega \\ R'\sin\theta' \end{array}\right.$

T ⊥ T' ⇔ $\overrightarrow{\Omega M}\,.\,\overrightarrow{\Omega M'} = 0$ ⇔ (Rcosθ). (R'cosθ') + R R' sinθ sinθ' = 0
⇔ R R' cosθ cosθ' + R R' sinθ sinθ' = 0 ⇔ R R' cos (θ - θ') =0
⇔ θ = θ' + $\frac{\pi}{2}$ (π)

Posons cos θ' = -ε sinθ et sinθ'= ε cosθ avec ε = ±1

I milieu de [MM'] ⇔ I $\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{R\cos\theta - \varepsilon R'\sin\theta}{2} \\ y = \dfrac{R\sin\theta + \varepsilon R'\cos\theta}{2} \end{array}\right.$ ⇔ $\begin{cases} 2x = R\cos\theta - \varepsilon R'\sin\theta \\ 2y = R\sin\theta + \varepsilon R'\cos\theta \end{cases}$

Par combinaison linéaire: *(on multiplie (1) par R et (2) par εR', puis (1) par -εR' et (2) par R)*

⇔ $\begin{cases} 2Rx + 2\varepsilon R'y = R^2\cos\theta + R'^2\cos\theta \\ -2\varepsilon R'x + 2Ry = R'^2\sin\theta + R^2\sin\theta \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 2Rx + 2\varepsilon R'y = (R^2 + R'^2)\cos\theta \\ -2\varepsilon R'x + 2Ry = (R^2 + R'^2)\sin\theta \end{cases}$

En élevant au carré et en additionnant :
$(2Rx+2\varepsilon R'y)^2 + (2Ry-2\varepsilon R'x)^2 = (R^2+R'^2)^2$

En développant :

$4R^2(x^2+y^2) + 4R'^2(x^2+y^2) = (R^2+R'^2)^2$ d'où $4(x^2+y^2) = \dfrac{(R^2+R'^2)^2}{R^2+R'^2}$

Enfin : $x^2+y^2 = \frac{1}{4}(R^2+R'^2)$ donc M sur le cercle de centre O et rayon $\frac{1}{2}\sqrt{R^2+R'^2}$

EX5 : *On munit le plan d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$. *Soient* $M_i\ (x_i, y_i\ )$, $1 \le i \ \le 4$, *quatre points non tous alignés. Montrer que* M_1, M_2, M_3, M_4 *sont cocycliques si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Application : trouver l'équation du cercle passant par :
$M_1(-3\ ;\ 2)$; $M_2(1\ ;\ 0)$; $M_3(-2\ ;\ 0)$.

M_1, M_2, M_3, M_4 sont cocycliques $\Leftrightarrow x_i^2 + y_i^2 + 2\alpha\, x_i + 2\beta\, y_i + \gamma = 0\ \forall i\ \in\ \{1,2,3,4\}$
Avec centre du cercle $\Omega\ (-\alpha\ ;\ -\beta\ )$ et rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ (pour $\alpha^2+\beta^2-\gamma \ge 0$)

On obtient donc un système homogène (S) : $(x_i^2 + y_i^2)\ t + x_i\ u + y_i\ v + w = 0$
qui possède une solution : $(1\ ;\ 2\alpha\ ;\ 2\beta\ ;\ \gamma\ ) \neq (0\ ;0\ ;0\ ;0)$
donc son déterminant est nul.

Réciproquement, si déterminant nul, alors (S) admet au moins une solution autre que (0 ;0 ;0 ;0).
Soit $(t_0\ ;\ u_0\ ;\ v_0\ ;\ w_0\ )$ cette solution non nulle

Si $t_0 = 0$, alors $\forall i \in\ \{1,2,3,4\}$: $x_i\ u + y_i\ v + w = 0$

- Si $(u_0\ ;\ v_0\ ) = (0\ ;0)$ alors on obtient $w_0 = 0$: contradiction
- Si $(u_0\ ;\ v_0\ ) \neq (0\ ;0)$ alors les 4 points sont alignés sur la droite $u_0x + v_0y + w_0 = 0$: contradiction

Donc $t_0 \neq 0$

Dans ce cas : $\left(1\ ;\ \frac{u_0}{t_0} ;\ \frac{v_0}{t_0} ;\ \frac{w_0}{t_0}\right)$ est aussi solution.

On a alors : $x_i^2 + y_i^2 + 2\alpha\, x_i + 2\beta\, y_i + \gamma = 0\ \forall i$ entier $\in\ \{1,2,3,4\}$

(en prenant $\alpha = \frac{u_0}{2t_0}$; $\beta = \frac{v_0}{2t_0}$; $\gamma = \frac{w_0}{t_0}$)

Vérifions que $\alpha^2+\beta^2-\gamma \ge 0$: on a par exemple $x_1^2 + y_1^2 + 2\alpha\, x_1 + 2\beta\, y_1 + \gamma = 0$

C'est-à-dire : $(x_1 + \alpha)^2 + (y_1 + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -\gamma$

Donc $\alpha^2+\beta^2-\gamma = (x_1 + \alpha)^2 + (y_1 + \beta)^2$. On a bien un cercle et les 4 points sont cocycliques.

Cas particulier :

C a pour équation : $x^2 + y^2 + x - 4\ y - 2 = 0$

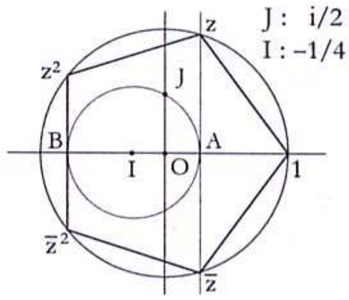
EX6 : On veut construire un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité de $\mathcal{P}$. On place le sommet S d'affixe 1 de ce pentagone.

En utilisant l'équation complexe du cercle de centre I d'affixe $-\frac{1}{4}$ passant par J d'affixe $-\frac{i}{2}$ justifier une construction géométrique simple de ce pentagone.

Les sommets du pentagone cherché sont les points ayant pour affixes les racines cinquièmes de l'unité :

$1 ; z ; z^2 ; \overline{z} ; \overline{z^2}$ avec $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ($z^3 = \overline{z^2}$ et $z^4 = \overline{z}$)

Ce sont les solutions de : $x^5 - 1 = 0$.



- $x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$z \neq 1$ donc $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

or $\quad z + z^4 = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2\alpha = \alpha'$ et $\alpha' > 0$ (α affixe de A)

et $\quad z^2 + z^3 = z^2 + \overline{z^2} = 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 2\beta = \beta'$ et $\beta' < 0$ (β affixe de B)

$\Rightarrow 1 + \alpha' + \beta' = 0$ d'où $\boxed{\alpha'+\beta' = -1}$

- Développons $\alpha' \times \beta' = (z + z^4) (z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z^3 + z^4 + z + z^2 = -1$

Donc $\boxed{\alpha' \times \beta' = -1}$

- α' et β' sont donc solutions de $x^2 + x - 1 = 0$ donc $\alpha' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\beta' = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$
- Calcul de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$: $\alpha' = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2\cos\dfrac{2\pi}{5} \Rightarrow \alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Calcul de $\sin\dfrac{2\pi}{5}$: $\beta' = 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 2\cos\dfrac{4\pi}{5} \Rightarrow \beta = \cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$

- Equation de C : $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + b = 0$ de centre I d'affixe $-\dfrac{1}{4}$

Donc l'équation est du type : $z\overline{z} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\overline{z} + b = 0$

En J d'affixe $\frac{i}{2}$ on obtient : $z = \frac{i}{2}$ et $\overline{z} = -\frac{i}{2}$ d'où $\frac{1}{4} + \frac{i}{8} - \frac{i}{8} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

Intersection avec l'axe des réels : $z = \overline{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0$; $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

On obtient deux points : A d'affixe $\dfrac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \alpha$ et B d'affixe $\dfrac{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}{2} =$

$\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4} = \beta$

D'où la construction : Le cercle de centre I passant par J coupe l'axe des réels en A et B. Les perpendiculaires à (Ox) en A et B coupent respectivement le cercle unité aux points d'affixes z ; $\overline{z}$ et z^2 ; $\overline{z^2}$, ce qui détermine à la règle et au compas les sommets du pentagone régulier.

EX 7 Quel est l'ensemble des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle droit?

Soit **C** l'ellipse en question d'équation

$$ax^2 + by^2 = 1$$

Soit un point ***p*** du plan de coordonnées x_0, y_0. Les tangentes issues de ce point ont pour équations:

$$\mathbf{C}^2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) - \mathbf{C}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}).\mathbf{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$$

c'est-à-dire dans notre cas:

$$(axx_0 + byy_0 - 1)^2 - (ax_0^2 + by_0^2 - 1)(ax^2 + by^2 - 1) = 0$$

Les termes du second degré de cette équation sont:

$$ax^2(by_0^2 - 1) - 2abx_0y_0xy + by^2(ax_0^2 - 1)$$

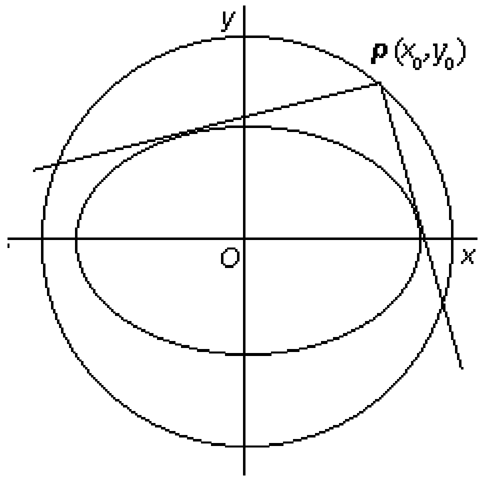
Les droites correspondantes seront perpendiculaires si la somme des coefficients des termes carrés en x et y est nulle; on obtient donc:

$$aby_0^2 - a + bax_0^2 - b = 0$$

cela signifie que le point ***p*** de coordonnées (x, y) est soumis à la condition:

$$x^2 + y^2 = (a + b)/ab$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'un cercle (le cercle orthoptique, ou cercle de Monge).



On voit par cet exemple combien une étude préliminaire générale des coniques permet de regagner dans la suite le temps qui aurait été nécessaire à une étude détaillée et séparée de chacun des types de coniques.