$\boxed{\text{Le cercle dans le plan}}$ *(leçon N° 137)*

1°) Définition, équations

a) définition et équations:

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, le cercle de centre I (a, b) et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant : $IM^2 = R^2$

Equation cartésienne : $\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0}$. On l'appelle équation "normale"

(*réciproquement, une équation du type $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ représente un cercle si $p^2+q^2-4r > o$ de centre I (-p/2;-q/2) et de rayon $R = \sqrt{p^2 + q^2 - 4r}$*)
.

Equation paramétrique:

$$\begin{cases} x = a + R\cos\alpha \\ y = b + R\sin\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in [-\pi ; +\pi[$$

ou encore :

$$\begin{cases} x = a + R\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b + R\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Equation polaire:

- *cercle de centre O: r = constante*
- *cercle passant par O de centre I (R , θ_0) : $r = 2R\cos(\theta - \theta_O)$.*

Equation complexe:
Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$: $z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + b = O$. Cercle de centre d'affixe a et de rayon $R = \sqrt{|a|^2 - b}$

Equation d'une tangente en Mo : $x(x_0 - a) + y(y_0 - b) - a x_0 - b y_0 + c = 0$

b) intersections

- **Droite et cercle**: on obtient 0; 1 (droite tangente) ou 2 points
- **Intersection de 2 cercles:** on obtient 0; 1(cercles tangents) ou 2 points
- **Cercles orthogonaux:** cercles se coupant avec des tangentes perpendiculaires aux points d'intersection.

2°) Puissance d'un point par rapport à un cercle:

Si Γ est un cercle de centre I et de rayon R donnés et M un point du plan.
Soit D une droite quelconque passant par M et Coupant le cercle en deux points A et B.
On démontre que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la droite D.
- On appelle puissance d'un point M par rapport à un cercle Γ de centre I et rayon R:

$$\boxed{P_\Gamma(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = IM^2 - R^2}$$

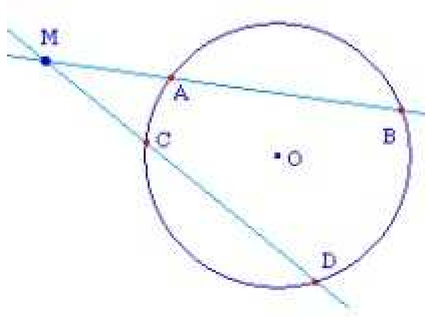
De plus, si l'équation de Γ s'écrit $x^2+y^2+ax+by+c=0$
alors le nombre: $P_\Gamma(M) = x^2+y^2+ax+by+c$ **;** *(on le note aussi Γ(M))*

Si M est sur le cercle: P(M)=0; si M extérieur au cercle P(M)>0; si M intérieur au cercle P(M)<0.

- ***L'axe radical de deux cercle*s** C et C' de centres Ω et Ω' est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles. C'est une **droite $\Delta_{C,C'}$** $\perp$ (ΩΩ').

- Soit Γ1, Γ2, Γ3 trois cercles. Alors leurs trois axes radicaux D1, D2, D3 sont soit confondus, soit concourants, soit parallèles

3°) Condition de cocyclicité de 4 points



- Avec des distances:

- **Soient 4 points A, B, C et D tels que (AB) et (CD) soient sécantes en M. Alors ces 4 points sont cocycliques ssi :**

  $$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

- **A, B, C, D sont cocycliques ou alignés dans cet ordre ssi** $\boxed{\mathbf{AC.BD = AB.CD + AD.BC}}$

  (Théorème de Ptolémée)

- Avec des angles de droites:

A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi $\widehat{(AC, AD)} = \widehat{(BC, BD)}$ *(angles de droites)*

(on retrouve en particulier le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre)

- Avec des nombres complexes:

A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi le birapport $\frac{d-a}{c-a} / \frac{d-b}{c-b}$ est réel.

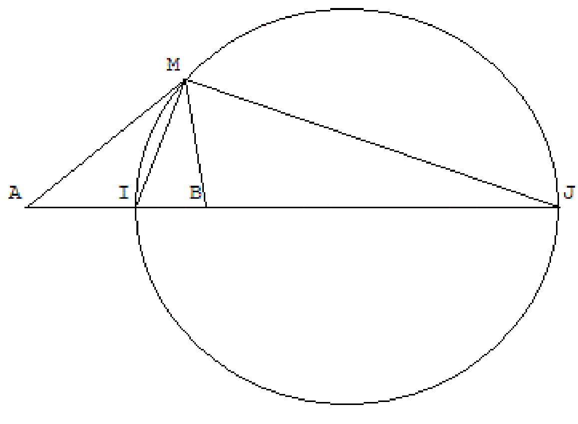
(a, b, c, d étant les affixes respectives des points A, B, C, D)

4°) Faisceaux de cercles:

a) Théorème d'Apollonius:

« Pour A et B deux points distincts donnés, le lieu des points M vérifiant:

$\frac{MA}{MB}$ **= k, pour k >O et k ≠ 1 est un cercle »** .



b) Faisceau de cercles

Soient deux cercle C_1 et C_2 , d'équations normales respectives f1(M)= 0 et f2(M)= 0, on appelle F faisceau linéaire de cercles de base C_1 et C_2,

l'ensemble des cercles d'équation normale: $\lambda f_1 1(M) +(1-\lambda) f_2(M)= 0$, avec λ réel.

- Si C_1 et C_2 ont même centre I, alors F est l'ensemble des cercles de centre I
- Si C_1 et C_2 se coupent en A et B, F est l'ensemble des cercles contenant A et B. On dit que F est un faisceau à points de base A et B.
- Si C_1 et C_2 ont une tangente commune Δ en A, F est l'ensemble des cercles tangents à Δ en A. On dit que F est un faisceau tangent.
- Si C_1 et C_2 sont disjoints, F contient exactement deux cercles points P et Q et les cercles de F sont centrés sur (PQ) \ ]PQ[. On dit que F est un faisceau de cercle à points limites P et Q.

  Remarque : si C_1 et C_2 ne sont pas concentriques F est aussi l'ensemble des cercles Γ vérifiant : $\Delta_{C1,\Gamma} = \Delta_{C1,C2}$.