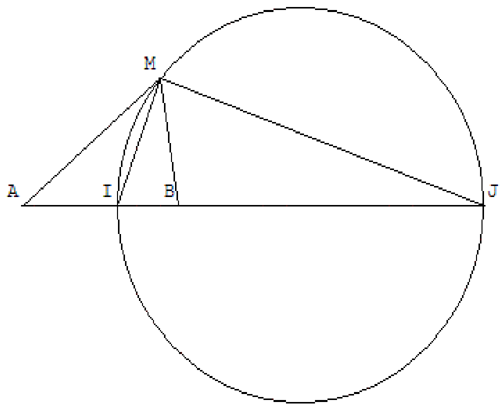
DEVELOPPEMENT : Théorème d'Appolonius



$\dfrac{MA}{MB} = k$ avec $k > 0$ et $k \neq 1$

$MA^2 = k^2 MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$ (*)

Posons I barycentre de A (1) et B (k) et
J barycentre de A (1) et B (-k).

On a alors, $\forall$ M , $(k+1)\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$

et $(1-k)\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$

En remplaçant dans (*) : $(k+1)\overrightarrow{MI}\,(1-k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow (k^2-1)\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{MJ} = 0$

Or $k \neq 1$ donc (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow$ M sur le cercle de diamètre [IJ]

Obtient-on tout le cercle ? Soit M' un point du cercle de diamètre [MI], on a alors $\overrightarrow{M'I}\,\overrightarrow{M'J} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{k+1}(\overrightarrow{M'A} + k\overrightarrow{M'B})\dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{M'A} - k\overrightarrow{M'B}) = 0 \Leftrightarrow M'A^2 - k^2 M'B^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{M'A}{M'B} = k$ *C.Q.F.D.*

- **Remarque 1 :** par construction de I **:** $\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} = \vec{O}$ d'où $\dfrac{IA}{IB} = k$ or $\dfrac{MA}{MB} = k$

  Donc I est le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{AMB}$
  D'où J est le pied de la bissectrice extérieure de $\widehat{AMB}$ (voir Lemme)

- **Remarque 2 :** on peut préciser le centre et le rayon du cercle à partir de A et B.

Retour sur $\overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0$: soit Ω le barycentre de A(1) et B($-k^2$) : $\vec{\Omega A} - k^2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) - k^2(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) = 0$

en développant : $\Leftrightarrow M\Omega^2 + \Omega A^2 + 2\,\overrightarrow{M\Omega}\,.\,\overrightarrow{\Omega A} - k^2 M\Omega^2 - k^2\Omega B^2 - 2k^2\,\overrightarrow{M\Omega}\,.\,\overrightarrow{\Omega B} = 0$

en regroupant : $\Leftrightarrow (1-k^2)M\Omega^2 + \Omega A^2 - k^2\Omega B^2 + 2\,\overrightarrow{M\Omega}\,[\overrightarrow{\Omega A} - k^2\overrightarrow{\Omega B}] = 0$
le crochet étant nul on en déduit :

$\Omega M^2 = \dfrac{\Omega A^2 - k^2\Omega B^2}{k^2-1}$ $\Rightarrow$ M est sur le cercle de centre Ω (barycentre de A(1) et B($-k^2$))

de rayon $\sqrt{\dfrac{\Omega A^2 - k^2\Omega B^2}{k^2-1}}$

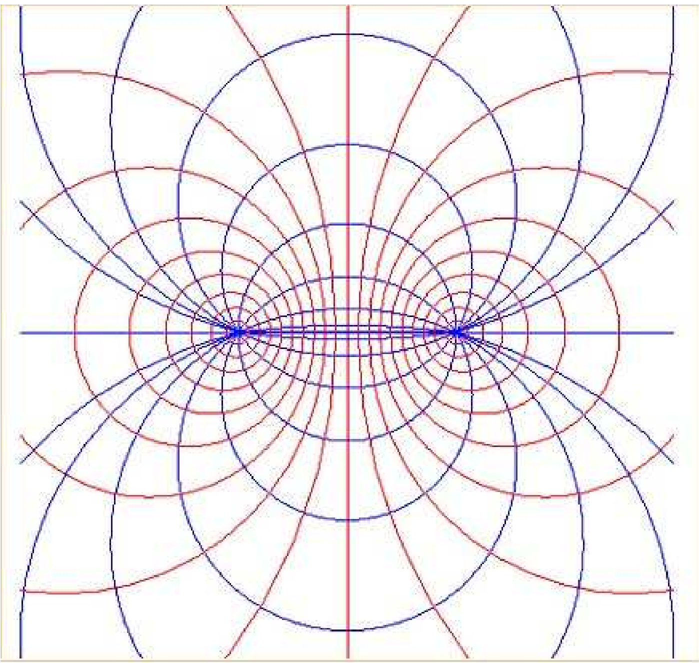
- position de Ω : $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{k^2\,\overrightarrow{AB}}{k^2-1}$

- **Remarque 3 :**

- Si on fait varier k, on obtient un faisceau $\Im$ de cercles à points limites A et B.

  (les centres de ces cercles sont sur]-∞, A[et]B, +∞[ )
  en particulier, **si k→0, Ω→A ; si k→1$^-$, Ω→ -∞ ; si k→1$^+$, Ω→+∞ ; enfin si k→∞, Ω→B**.

- Le faisceau conjugué orthogonal à $\Im$ est l'ensemble des cercles passant par A et B ; c'est le faisceau à points de base A et B.
- Cette figure s'interprète comme formée de lignes de champ magnétique ou électrostatique.



<u>Démonstration du Lemme :</u>

(AI) bissectrice de $\widehat{BAC}$ dans le triangle ABC.
On mène par B la parallèle à (AI), elle coupe (AC) en B'.

Théorème de Thalès : $\frac{\text{BI}}{\text{IC}} = \frac{\text{B'A}}{\text{AC}}$; de plus $\widehat{B'BA} = \widehat{BAI}$ (angles alternes-internes)

Et $\widehat{BB'A} = \widehat{IAC}$ (angles correspondants)

Or $\widehat{IAC} = \widehat{BAI}$ car (AI) bissectrice de BAC

Donc $\widehat{BB'A} = \widehat{B'BA}$ ⇒BAB' isocèle et B'A = BA ce qui entraîne : $\frac{\text{BI}}{\text{IC}} = \frac{\text{BA}}{\text{AC}}$

Réciproquement *:* si I' vérifie $\frac{\text{BI'}}{\text{I'C}} = \frac{\text{BA}}{\text{AC}}$ alors I et I' partagent [BA] dans le même rapport donc I=I'

Donc (AI') bissectrice de $\widehat{BAC}$.