BREVET 2006: CORRIGE

I ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. **Calculons A :**

$A=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\div\frac{3}{2}$

$A=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}$

$A=\frac{1}{3}+\frac{5\times2}{6\times3}$

$A=\frac{1}{3}+\frac{5\times2}{2\times3\times3}$

$A=\frac{1}{3}+\frac{5}{9}$

$A=\frac{3}{9}+\frac{5}{9}$

$A=\frac{8}{9}$

2. **Calculons B :**

$B=50\sqrt{45}-3\sqrt{5}+6\sqrt{125}$

$B=50\sqrt{5\times3\times3}-3\sqrt{5}+6\sqrt{5\times5\times5}$

$B=50\times3\sqrt{5}-3\sqrt{5}+6\times5\sqrt{5}$

$B=150\sqrt{5}-3\sqrt{5}+30\sqrt{5}$

$B=177\sqrt{5}$

3. **Calculons C :**

$C=\frac{5\times10^{-2}\times7\times10^{5}}{2\times10^{7}}$

$C=\frac{5\times7\times10^{-2+5}}{2\times10^{7}}$

$C=\frac{35\times10^{3}}{2\times10^{7}}$

$C=17{,}5\times10^{3-7}$

$C=17{,}5\times10^{-4}$

$C=1{,}75\times10\times10^{-4}$

$C=1{,}75\times10^{-3}$

Exercice 2

1. **Développons et réduisons D :**

$D=(2x+3)^2+(2x+3)(7x-2)$

$D=(2x)^2+2\times2x\times3+3^2+2x\times7x+2x\times(-2)+3\times7x+3\times(-2)$

$D=4x^2+12x+9+14x^2-4x+21x-6$

$D=18x^2+29x+3$

2. **Factorisons D :**

$D=(2x+3)^2+(2x+3)(7x-2)$

$D=(2x+3)[(2x+3)+(7x-2)]$

$D=(2x+3)(2x+3+7x-2)$

$D=(2x+3)(9x+1)$

3. **Calculons D pour x= -4 :**

Pour x= -4 :

D = 18 × $(-4)^2$ + 29 × (-4) + 3

D = 18 × 16 - 29 × 4 + 3
D = 288 - 116 + 3
D = 175

4. **Résolvons l'équation :**
$(2x+3)(9x+1)=0$
Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, et réciproquement.
$2x+3=0$ ou $9x+1=0$
$2x=-3$ ou $9x=-1$
$x=-\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{9}$
Les solutions de l'équation sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{9}$

Exercice 3

1. **Nombre maximal de personnes pouvant bénéficier de ces friandises :**
Chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons, le nombre n de personnes divise donc le nombre de sucettes et le nombre de bonbons. Le nombre n est donc un diviseur de 84 et 147.
De plus, on veut que le nombre n de personnes bénéficiant des friandises soit maximal, donc n est le plus grand diviseur commun de 84 et 147 (le PGCD de 84 et 147).
Déterminons le PGCD de 84 et 147 :
>> Par la méthode des soustractions successives :
PGCD(147 ; 84) = PGCD(84 ; 63) car 147 - 84 = 63
PGCD(84 ; 63) = PGCD(63 ; 21) car 84 - 63 = 21
PGCD(63 ; 21) = PGCD(42 ; 21) car 63 - 21 = 42
PGCD(42 ; 21) = PGCD(21 ; 21) car 42 - 21 = 21
PGCD(21 ; 21) = 21
D'où : PGCD(147 ; 84) = 21

>> En utilisant l'algorithme d'Euclide :
147 = 84 × 1 + 63
84 = 63 × 1 + 21
63 = 21 × 3 + 0
Le dernier reste non nul est 21, donc PGCD(147 ; 84) = 21
D'où : 21 personnes pourront bénéficier des friandises.

2. Elles auront 84 : 21 = 4 sucettes et 147 : 21 = 7 bonbons chacune.

Exercice 4

1. **Résolvons le système :**
$\begin{cases} 8x+3y=39,5 \\ 7x+9y=50,5 \end{cases}$
On multiplie la première équation par (-3) :
$\begin{cases} -24x-9y=-118,5 \\ 7x+9y=50,5 \end{cases}$
On additionne membre à membre :
$-17x=-68$
$x=\frac{-68}{-17}$
$x=4$

En remplaçant x par 4 dans la première équation, on obtient :
8 × 4 + 3y = 39,5

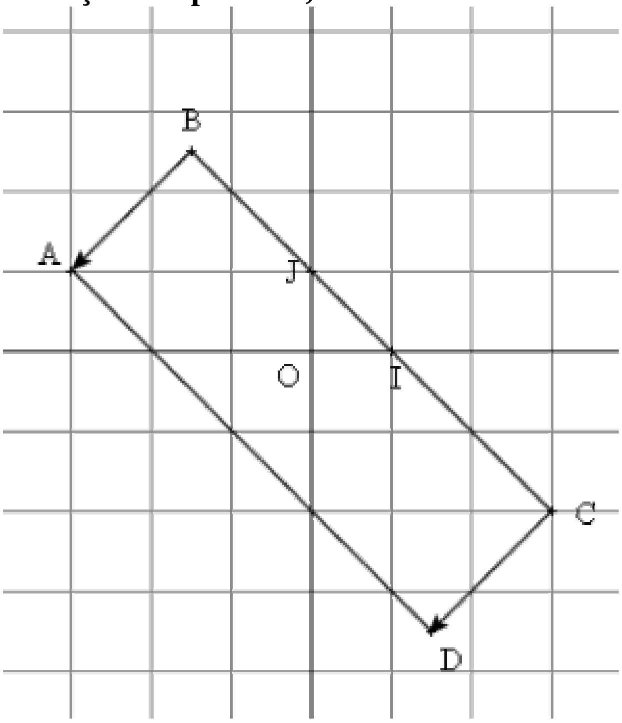
$32 + 3y = 39{,}5$
$3y = 39{,}5 - 32$
$3y = 7{,}5$
$y = \frac{7{,}5}{3}$
$y = 2{,}5$
Le couple (4 ; 2,5) est solution du système.

2. **Déterminons le prix d'un ticket pour un adulte et celui d'un ticket pour un enfant :**
Soit x le prix d'un ticket pour un adulte
Soit y le prix d'un ticket pour un enfant.
" Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 € " se traduit par : $8x + 3y = 39{,}5$
" Le second groupe, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 € " se traduit par : $7x + 9y = 50{,}5$
On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} 8x+3y=39{,}5 \\ 7x+9y=50{,}5 \end{cases}$
Nous l'avons résolu à la question précédente.
D'où : le prix d'un ticket pour adulte est de 4 € et celui d'un ticket pour enfant est de 2,5 €.

II GEOMETRIE

Exercice 1

1. **Plaçons les points A, B et C :**



2. **Montrons que AC = $\sqrt{45}$:**
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$
$AC^2 = (3 - (-3))^2 + (-2 - 1)^2$
$AC^2 = 6^2 + (-3)^2$
$AC^2 = 36 + 9$
$AC^2 = 45$
D'où : AC = $\sqrt{45}$.

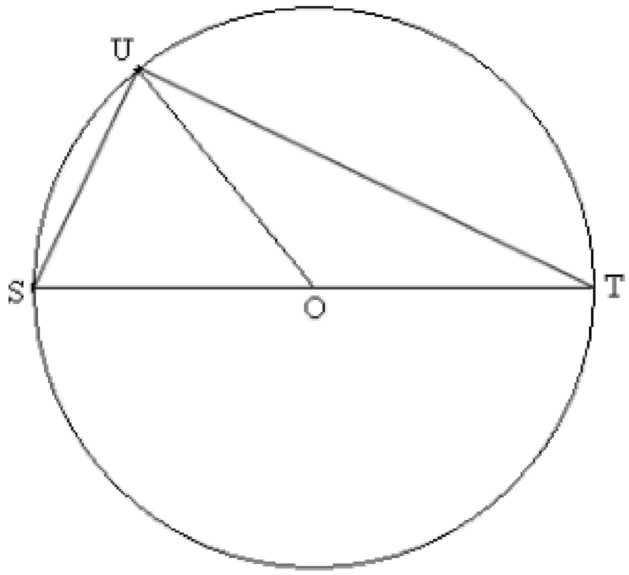
3. **Démontrons que ABC est un triangle rectangle :**
On a d'une part : $AB^2 + BC^2 = \sqrt{4,5}^2 + \sqrt{40,5}^2 = 4,5 + 40,5 = 45$,
et d'autre part : $AC^2 = \sqrt{45}^2 = 45$.
Comme $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

4. **Plaçons le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$:**
cf graphique

5. **Déterminons la nature du quadrilatère ABCD :**
On sait que le point D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. ABCD est donc un parallélogramme.
De plus, comme ABC est rectangle en B, alors ABCD a un angle droit.
On en conclut que ABCD est un rectangle.

Exercice 2

1.



2. **Démontrons que STU est un triangle rectangle en U :**
On sait que U est un point du cercle de diamètre [ST], donc le triangle STU est rectangle en U.

3. **Donnons la valeur arrondie au dixième de l'angle $\widehat{STU}$:**
Dans le triangle STU rectangle en U, on a :
$\sin \widehat{STU} = \frac{SU}{ST} = \frac{3}{7}$
Donc : $\widehat{STU} \approx 25,4°$.

4. **Déduisons-en une valeur approchée au dixième de $\widehat{SOU}$:**
L'angle au centre $\widehat{SOU}$ et l'angle inscrit $\widehat{STU}$ interceptent le même arc, donc :
$\widehat{SOU} = 2 \times \widehat{STU} \approx 2 \times 25,4$
D'où : $\widehat{SOU} \approx 50,8°$.

Exercice 3

1. **Montrons que OB = 9 cm :**
Dans le triangle OAB rectangle en O, on a :
$\tan\widehat{OAB}=\frac{OB}{OA}$,
donc OB = OA × $\tan\widehat{OAB}=3\sqrt{3}\times\tan 60^{o}=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\times 3$
Donc : OB = 9 cm

2. **Montrons que les droites (CD) et (AB) sont parallèles :**
On sait que les points A, O, D d'une part et B, O, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.
On a : $\frac{OC}{OB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ et $\frac{OD}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$
Donc $\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OA}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

III PROBLEME

Partie A

1. a) **Calculons EF :**
Les droites (EA) et (FB) sont sécantes en S.
On sait que EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base, donc les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}$.
De $\frac{SE}{SA}=\frac{EF}{AB}$, on en déduit que $\mathbf{EF}=\frac{SE\times AB}{SA}=\frac{3\times 9}{12}=\frac{9}{4}$
D'où : EF = 2,25 cm.

1. b) **Calculons SB :**
Dans le triangle SAB rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :
$SB^2 = SA^2 + AB^2$, donc :
$SB^2 = 12^2 + 9^2$
$SB^2 = 144 + 81$
$SB^2 = 225$
Donc : SB = $\sqrt{225}$
D'où : SB = 15 cm

2. a) **Calculons le volume de la pyramide SABCD :**
$\mathscr{V}_{SABCD}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$
$\mathscr{V}_{SABCD}=\frac{1}{3}\times AB^2\times SA$
$\mathscr{V}_{SABCD}=\frac{1}{3}\times 9^2\times 12=324$
D'où : le volume de la pyramide SABCD est de 324 cm³.

2. b) Le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH est donné par $k\ =\ \frac{SE}{SA}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

2. c) **Déduisons-en le volume de SEFGH :**
$\mathscr{V}_{SEFGH}=k^3\times\mathscr{V}_{SABCD}=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times 324=\frac{324}{64}=5{,}0625$
D'où : le volume de la pyramide SEFGH est d'environ 5 cm³.

Partie B

1. **Montrons que MN = 0,75x** :
On sait que MNPQ est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M,

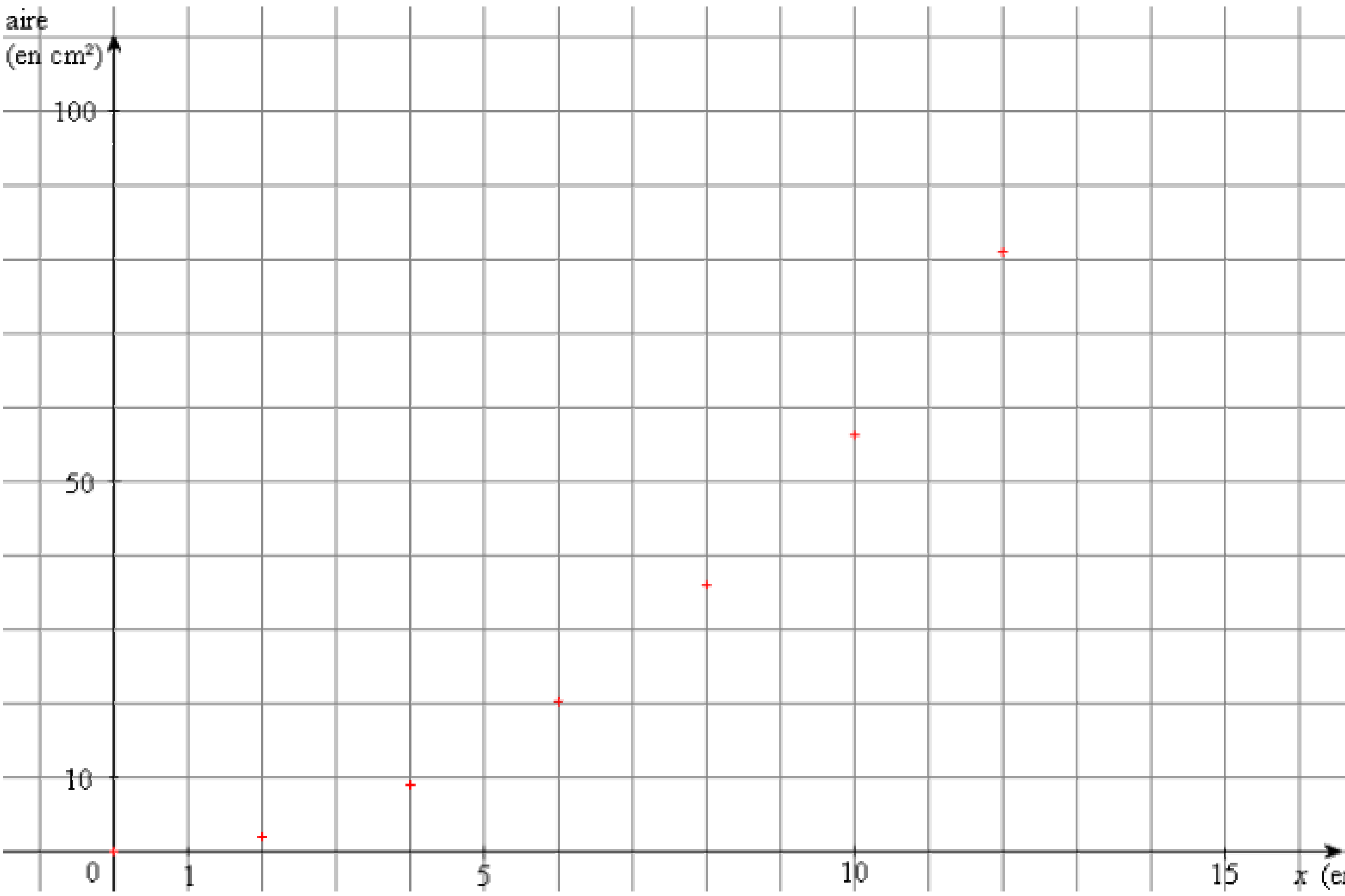
donc les droites (MN) et (AB) sont parallèles.
De plus, les droites (AM) et (BN) sont sécantes en S, alors d'après le théorème de Thalès, on a :
$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB}$.
De $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}$, on en déduit que $MN = \frac{SM \times AB}{SA} = \frac{x \times 9}{12}$
D'où : EF = 0,75x (en cm).

2. **Montrons que A(x) = 0,5625 x^2:**
L'aire du carré MNPQ en fonction de x est donnée par :
A(x) = MN² = $(0{,}75x)^2$
D'où : A(x) = 0,5625 x^2 (en cm²)

3. **Complétons le tableau :**

x: longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
A(x) : aire du carré MNPQ	0,5625 × 0^2 = 0	0,5625 × 2^2 = 2,25	0,5625 × 4^2 = 9	0,5625 × 6^2 = 20,25	0,5625 × 8^2 = 36	0,5625 × 10^2 = 56,25	0,5625 × 12^2 = 81

4. **Plaçons dans le repère les points d'abscisse x et d'ordonnée A(x) données par le tableau :**



5. Les points d'abscisse x et d'ordonnée A(x) ne sont pas alignés, donc l'aire de MNPQ n'est