ARITHMETIQUE

1°) Nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction a/b.
On trouve parmi les rationnels:

$-$ *Les entiers relatifs* : $3 = \frac{3}{1}$; $-7 = \frac{-7}{1}$.

$-$ *Les nombres décimaux relatifs* : $0{,}23 = \frac{23}{100}$; $-5{,}7 = \frac{-57}{10}$.

$-$ *Les nombres non décimaux résultants d'une division qui ne tombe pas juste* : $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}$...

Remarque, la forme décimale d'un rationnel est toujours répétitive, on dit qu'on observe une période
exemple: 2/7 = 0,285714285714285714285714285714 29...   285714 est la période

Par contre, un nombre irrationnel n'est pas le résultat d'une fraction, la partie décimale n'est pas périodique.

Par exemple: π= 3,141 592 653 589 793 238 462 ... π est irrationnel.

2°) Diviseurs communs, PCGD.

Considérons les nombres entiers 120 et 48.
On recherche tous les diviseurs de 120 et tous les diviseurs de 48:

Diviseurs de 120:	Diviseurs de 48:
1 × 120	1 × 48
2 × 60	2 × 24
3 × 40	3 × 16
4 × 30	4 × 12
5 × 24	6 × 8
6 × 20	
8 × 15	
10 × 12	

On remarque que les **diviseurs communs** à 120 et 48 sont: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 24.
Parmi ces diviseurs communs, le plus grand est 24.
On dit que 24 est le **PGCD** (plus grand commun diviseur) de 120 et 48.

3°) Recherche du PGCD

Pour rechercher le PGCD de deux nombres, il existe deux méthodes rapides, en plus de la recherche systématique de tous les diviseurs communs.

a) Méthode par soustractions

"Si on nombre divise à la fois a et b, il divise aussi leur différence".
En partant de cette propriété, on applique la méthode de soustractions successives.

$$\begin{array}{r}120\\-\ 48\\\hline 72\end{array}\qquad\begin{array}{r}72\\-\ 48\\\hline 24\end{array}\qquad\begin{array}{r}48\\-\ 24\\\hline 24\end{array}\qquad\begin{array}{r}24\\-\ 24\\\hline 00\end{array}$$

Le PGCD doit diviser 120 et 48 et donc aussi 120-48, c'est à dire 72 et 48.
On recommence en calculant 72 - 48 , puis 48 - 24 et ainsi de suite en prenant toujours les deux derniers résultats.
Le **dernier résultat non nul** est donc obligatoirement le PGCD (ici 24).

Deuxième exemple, recherche du PGCD de 84 et 60:

$$\begin{array}{r}84\\-\ 60\\\hline 24\end{array}\qquad\begin{array}{r}60\\-\ 24\\\hline 36\end{array}\qquad\begin{array}{r}36\\-\ 24\\\hline 12\end{array}\qquad\begin{array}{r}24\\-\ 12\\\hline 12\end{array}\qquad\begin{array}{r}12\\-\ 12\\\hline 00\end{array}$$

Le PGCD de 84 et 60 est donc 12.

<u>b) Méthode par divisions (algorithme d'Euclide)</u>

Le même type de raisonnement s'applique aussi avec des divisions successive...
Exemple, recherche du PGCD de 120 et 48 par divisions:

$$\begin{array}{r|l}120 & 48\\\cline{2-2} 24 & 2\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}48 & 24\\\cline{2-2} 00 & 2\end{array}$$

On divise 120 par 48; puis 48 avec le reste 24...
Le **dernier reste non nul,** 12, donne le PGCD.

Deuxième exemple:
recherche du PGCD de 165 et 105

$$\begin{array}{r|l}165 & 105\\\cline{2-2} 60 & 1\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}105 & 60\\\cline{2-2} 45 & 1\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}60 & 45\\\cline{2-2} 15 & 1\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}45 & 15\\\cline{2-2} 0 & 3\end{array}$$

Le PGCD de 165 et 105 est donc 15.

<u>4°) Nombres premiers entre eux, fraction irréductible</u>

Lorsque le PGCD de deux nombres est 1 on dit qu'ils sont **premiers entre eux.**
C'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseurs communs.

En particulier, si on divise deux nombres par leur PGCD, on obtient des nombres premiers entre eux.
Exemple: le PGCD de 120 et 48 est 24   120 : 24 = 5 et 48 : 24 = 2 .
5 et 2 n'ont **pas de diviseurs communs**, ils sont **premiers entre eux**.

Ceci peut être très utile pour simplifier des fractions en divisant le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{48}{120}=\frac{48:24}{120:24}=\frac{2}{5}.$$

La fraction 2/5 n'est **plus simplifiable**, on dit qu'elle est **irréductible**.